

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

8.9 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$ 12/8/9/1

Bilden Sie (falls existent) alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f .

Was läßt sich über die gemischten Ableitungen aussagen?

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Inhalt des Satzes von Schwarz.

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.9 Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt: 12/8/9/2

$$f_x(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5),$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \cdot (-4x^3 y^3 + 12x y^5),$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \cdot (x^6 + 9x^4 y^2 - 9x^2 y^4 - y^6),$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4),$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \cdot (-12x^5 y + 4x^3 y^3),$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \cdot (x^6 + 9x^4 y^2 - 9x^2 y^4 - y^6).$$

Die gemischten Ableitungen stimmen überein; da f_x, f_y, f_{xy} existieren und f_{xy} stetig ist, folgt dies schon aus dem Satz von Schwarz.

Für $x = y = 0$ ist

$$f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0) \quad \text{und} \quad f_{xx}(0, 0) = 0 = f_{yy}(0, 0).$$

Weiterhin gilt:

$$f_{xy}(0, 0) = -1 \quad \text{und} \quad f_{yx}(0, 0) = 1.$$

Die gemischten Ableitungen stimmen nicht überein. Da f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} existieren, sind f_{xy} und f_{yx} in $(0, 0)$ nicht stetig.

Lösung zu Aufgabe 8.9 Es ist $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$ 12/8/9/3

1. Fall: $(x, y) \neq (0, 0)$. In diesem Fall lassen sich die partiellen Ableitungen nach den üblichen Differentiationsregeln bilden, also

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \left((3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3 y - x y^3) \cdot 2x \right) \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5), \end{aligned}$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \cdot \left((4x^3 y + 8x y^3)(x^2 + y^2) - (x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5) \cdot 4x \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \cdot (-4x^3y^3 + 12xy^5), \\
f_{xy}(x, y) &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \cdot ((x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^2 + y^2) - (x^4y + 4x^2y^3 - y^5) \cdot 4y) \\
&= \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \cdot (x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6), \\
f_y(x, y) &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot ((x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3) \cdot 2y) \\
&= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (x^5 - 4x^3y^2 - xy^4), \\
f_{yy}(x, y) &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \cdot ((-8x^3y - 4xy^3)(x^2 + y^2) - (x^5 - 4x^3y^2 - xy^4) \cdot 4y) \\
&= \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \cdot (-12x^5y + 4x^3y^3), \\
f_{yx}(x, y) &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \cdot ((5x^4 - 12x^2y^2 - y^4)(x^2 + y^2) - (x^5 - 4x^3y^2 - xy^4) \cdot 4x) \\
&= \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \cdot (x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6).
\end{aligned}$$

Die gemischten Ableitungen stimmen überein. Aus dem Satz von Schwarz (vgl. 8/2/2) hätte man dies schon schließen können aufgrund der Existenz von f_x , f_y , f_{xy} und der Stetigkeit von f_{xy} .

2. Fall: $x = y = 0$. Wir untersuchen zunächst

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0}.$$

Es ist $f(x, 0) = f(0, 0) = 0 = f(0, y)$. Folglich gilt:

$$f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0).$$

Wir betrachten jetzt die Limes der Differenzenquotienten von $f_x(x, 0)$, $f_x(0, y)$, $f_y(x, 0)$ und $f_y(0, y)$ an der Stelle 0. Es ist

$$\frac{f_x(x, 0) - f_x(0, 0)}{x - 0} = 0 = \frac{f_y(0, y) - f_y(0, 0)}{y - 0}$$

und somit $f_{xx}(0, 0) = 0$, $f_{yy}(0, 0) = 0$. Weiterhin gilt:

$$\frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y - 0} = \frac{-y^5}{y^4} = -1 \quad \text{und} \quad \frac{f_y(x, 0) - f_y(0, 0)}{x - 0} = \frac{x^5}{x^4} = x,$$

also $f_{xy}(0, 0) = -1$ und $f_{yx}(0, 0) = 1$.

Für diesen Fall stimmen die gemischten Ableitungen nicht überein. Da f_x , f_y , f_{xy} bzw. f_{yx} existieren, sind f_{xy} bzw. f_{yx} in $(0, 0)$ nicht stetig.