

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

- 8.10** Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, M eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n und f in M definiert. 12/8/10/1
 Weiterhin besitze f in jedem Punkt aus M partielle Ableitungen nach allen Variablen x_1, \dots, x_n .
 Zeigen Sie: Ist $\bar{a} \in M$ und sind alle partiellen Ableitungen in einer Umgebung von \bar{a} beschränkt, dann ist f in \bar{a} stetig.

Lösung zu Aufgabe 8.10 Sei $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ für $i = 0, \dots, n$, also 12/8/10/3
 $\bar{x}_0 = (a_1, \dots, a_n) := \bar{a}$ und $\bar{x}_n = (x_1, \dots, x_n) := \bar{x}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(\bar{x}) - f(\bar{a})| &= |f(\bar{x}_n) - f(\bar{x}_{n-1}) + f(\bar{x}_{n-1}) - f(\bar{x}_{n-2}) + f(\bar{x}_{n-2}) - \dots - f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_0)| \\ &\leq |f(\bar{x}_n) - f(\bar{x}_{n-1})| + |f(\bar{x}_{n-1}) - f(\bar{x}_{n-2})| + \dots + |f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_0)| \\ &= \left| \frac{f(\bar{x}_n) - f(\bar{x}_{n-1})}{x_n - a_n} \right| \cdot |x_n - a_n| + \dots + \left| \frac{f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_0)}{x_1 - a_1} \right| \cdot |x_1 - a_1| \quad (\text{vgl. 7/1/10}) \\ &= |f_{x_n}(\bar{x}_{n-1}) + o_n(x_n)| \cdot |x_n - a_n| + \dots + |f_{x_1}(\bar{x}_0) + o_1(x_1)| \cdot |x_1 - a_1|. \end{aligned}$$

Da die partiellen Ableitungen in M beschränkt sind, $o_i(x_i) \xrightarrow{x_i \rightarrow a_i} 0$ und $\lim_{x_i \rightarrow a_i} |x_i - a_i| = 0$, gilt: $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} |f(\bar{x}) - f(\bar{a})| = 0$. Folglich ist f in \bar{a} stetig.