Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

8.10 Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und f in M definiert. **12/8/10/1**
Weiterhin besitze f in jedem Punkt aus M partielle Ableitungen nach allen Variablen $x_1, \ldots, x_n$.
Zeigen Sie: Ist $\overline{a} \in M$ und sind alle partiellen Ableitungen in einer Umgebung von $\overline{a}$ beschränkt, dann ist f in $\overline{a}$ stetig.

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.10 Für $\overline{x}_i = (x_1, \ldots, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$; $i = 0, \ldots, n$, **12/8/10/2**
also $\overline{x}_0 = (a_1, \ldots, a_n) := \overline{a}$ und $\overline{x}_n = (x_1, \ldots, x_n) := \overline{x}$ schätze man die folgende Summe ab:

$$|f(\overline{x}) - f(\overline{a})| =$$
$$|f(\overline{x}_n) - f(\overline{x}_{n-1}) + f(\overline{x}_{n-1}) - f(\overline{x}_{n-2}) + f(\overline{x}_{n-2}) - \ldots - f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_0)|$$
$$\leq |f(\overline{x}_n) - f(\overline{x}_{n-1})| + |f(\overline{x}_{n-1}) - f(\overline{x}_{n-2})| + \ldots + |f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_0)|.$$

Damit erhält man schließlich die Behauptung.

Lösung zu Aufgabe 8.10 Sei $\overline{x}_i = (x_1, \ldots, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ für $i = 0, \ldots, n$, also **12/8/10/3**
$\overline{x}_0 = (a_1, \ldots, a_n) := \overline{a}$ und $\overline{x}_n = (x_1, \ldots, x_n) := \overline{x}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|f(\overline{x}) - f(\overline{a})| &= |f(\overline{x}_n) - f(\overline{x}_{n-1}) + f(\overline{x}_{n-1}) - f(\overline{x}_{n-2}) + f(\overline{x}_{n-2}) - \ldots - f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_0)| \\
&\leq |f(\overline{x}_n) - f(\overline{x}_{n-1})| + |f(\overline{x}_{n-1}) - f(\overline{x}_{n-2})| + \ldots + |f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_0)| \\
&= \left|\frac{f(\overline{x}_n) - f(\overline{x}_{n-1})}{x_n - a_n}\right| \cdot |x_n - a_n| + \ldots + \left|\frac{f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_0)}{x_1 - a_1}\right| \cdot |x_1 - a_1| \qquad \text{(vgl. 7/1/10)} \\
&= |f_{x_n}(\overline{x}_{n-1}) + o_n(x_n)| \cdot |x_m - a_n| + \ldots + |f_{x_1}(\overline{x}_0) + o_1(x_1)| \cdot |x_1 - a_1|.
\end{aligned}$$

Da die partiellen Ableitungen in M beschränkt sind, $o_i(x_i) \xrightarrow[x_i \to a_i]{} 0$ und $\lim\limits_{x_i \to a_i} |x_i - a_i| = 0$,
gilt: $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} |f(\overline{x}) - f(\overline{a})| = 0$. Folglich ist f in $\overline{a}$ stetig.