

## Kapitel 12 Aufgabensammlung

### 12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

**Lösung zu Aufgabe 8.11** Sei  $\bar{c}$  ein innerer Punkt des Definitionsbereiches von  $f$  und 12/8/11/3

$$D := \begin{vmatrix} f_{xx}(\bar{c}) & f_{xy}(\bar{c}) \\ f_{xy}(\bar{c}) & f_{yy}(\bar{c}) \end{vmatrix}.$$

Ist  $D > 0$ , dann besitzt  $f$  an der Stelle  $\bar{c}$  ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Minimum bzw. Maximum, falls  $f_{xx}(\bar{c}) > 0$  bzw.  $f_{xx}(\bar{c}) < 0$  (vgl. 3/2/22). Um die globalen Extrema der Funktion  $f$  zu finden, betrachten wir  $f$  auch auf dem Rand des Definitionsbereiches, insbesondere in den Eckpunkten der rechteckigen Bereiche.

- (a) Sei  $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2$  und  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ . Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte.

Es ist  $f_x(x, y) = 2x$  und  $f_y(x, y) = 2(y-1)$ . Daraus ergibt sich der einzige kritische Punkt  $\bar{c} := (0, 1)$ . Nur dort kann  $f$  ein lokales Extremum besitzen (vgl. 8/3/18).

Es ist

$$D = f_{xx}(\bar{c}) \cdot f_{yy}(\bar{c}) - f_{xy}^2(\bar{c}) = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(\bar{c}) = 2 > 0.$$

Folglich besitzt  $f$  an der Stelle  $\bar{c}$  ein lokales Minimum der Größe  $f(0, 1) = 0$ .

Wir betrachten jetzt  $f$  auf dem Rand des Definitionsbereiches.

Sei  $x = \pm 2$  und  $-2 \leq y \leq 2$ , also  $f(\pm 2, y) := g_1(y) = 4 + (y-1)^2$ .

Wir untersuchen  $g_1$  (als Funktion der Veränderlichen  $y$ ) auf lokale Extrema.

$$g_1'(y) = 2(y-1) = 0 \iff y = 1; \quad \text{und} \quad g_1''(y) = 2 > 0.$$

Folglich besitzt  $g_1$  an der Stelle  $y = 1$  ein lokales Minimum der Größe  $g_1(1) = 4$  (dies ist nach unserer Definition kein lokales Extremum von  $f(x, y)$  – vgl. 8/3/17).

Sei jetzt  $y = -2$  und  $-2 \leq x \leq 2$ , also  $f(x, -2) := g_2(x) = x^2 + 9$ .

$$g_2'(x) = 2x = 0 \iff x = 0, \quad \text{und} \quad g_2''(x) = 2 > 0;$$

somit besitzt  $g_2$  in  $x = 0$  ein lokales Minimum der Größe  $g_2(0) = 9$ .

Schließlich sei  $y = 2$  und  $-2 \leq x \leq 2$ , also  $f(x, 2) := g_3(x) = x^2 + 1$ .

$$g_3'(x) = 2x = 0 \iff x = 0, \quad \text{und} \quad g_3''(x) = 2 > 0;$$

folglich besitzt  $g_3$  in  $x = 0$  ein lokales Minimum der Größe  $g_3(0) = 1$ .

Zur Bestimmung der globalen Extrema haben wir zum Vergleich noch die Funktionswerte von  $f$  in den 4 Eckpunkten heranzuziehen:

$$f(\pm 2, -2) = 13 \quad \text{und} \quad f(\pm 2, 2) = 5.$$

Insgesamt erhält man somit:  $f$  besitzt genau ein lokales Minimum an der Stelle  $\bar{c} = (0, 1)$  der Größe  $f(\bar{c}) = 0$  und kein lokales Maximum.  $f(\bar{c})$  ist gleichzeitig globales Minimum von  $f$ . An den Stellen  $(\pm 2, -2)$  besitzt  $f$  ein globales Maximum der Größe  $f(\pm 2, -2) = 13$ .

- (b) Sei  $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$  und  $1 \leq x \leq 10$ ,  $1 \leq y \leq 10$ . Es ist

$$f_x(x, y) = y - \frac{50}{x^2}, \quad f_y(x, y) = x - \frac{20}{y^2},$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{100}{x^3}, \quad f_{xy}(x, y) = 1 = f_{yx}(x, y) \quad \text{und} \quad f_{yy}(x, y) = \frac{40}{y^3}.$$

Aus  $y - \frac{50}{x^2} = 0$  und  $x - \frac{20}{y^2} = 0$  ergeben sich die kritischen Punkte. Es ist

$$y - \frac{50 \cdot y^4}{400} = 0 = y(1 - \frac{y^3}{8}) \iff y = 0 \text{ oder } y = 2$$

( $y = 0$  scheidet als Lösung aus, liegt nicht im Inneren des Definitionsbereiches);

also  $y = 2$  und  $x = 5$ . Einziger kritischen Punkt ist  $\bar{c} = (5, 2)$ . Weiterhin ist

$$D = f_{xx}(\bar{c}) \cdot f_{yy}(\bar{c}) - f_{xy}^2(\bar{c}) = \frac{100}{5^3} \cdot \frac{40}{2^3} - 1 = 3 > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(\bar{c}) > 0.$$

Folglich besitzt  $f$  an der Stelle  $\bar{c}$  ein lokales Minimum der Größe

$$f(5, 2) = 10 + \frac{50}{5} + \frac{20}{2} = 30.$$

Wir untersuchen jetzt  $f$  auf dem Rande des Definitionsbereiches.

Sei  $x = 1$  und  $1 \leq y \leq 10$ ; also  $f(1, y) := g_1(y) = y + 50 + \frac{20}{y}$ . Es ist

$$g_1'(y) = 1 - \frac{20}{y^2} = 0 \iff y = \pm 2\sqrt{5}.$$

( $-2\sqrt{5}$  scheidet als Lösung aus, liegt nicht im Definitionsbereich)

$$g_1''(y) = \frac{40}{y^3} \implies g_1''(2\sqrt{5}) > 0.$$

$g_1$  besitzt an der Stelle  $y = 2\sqrt{5}$  ein lokales Minimum der Größe

$$g_1(2\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} + 50 + \frac{20}{2\sqrt{5}} = 50 + 4\sqrt{5}.$$

Sei  $x = 10$  und  $1 \leq y \leq 10$ , also  $f(10, y) := g_2(y) = 10y + 5 + \frac{20}{y}$ . Dann ist

$$g_2'(y) = 10 - \frac{20}{y^2} = 0 \iff y = \pm\sqrt{2}. \quad (-\sqrt{2} \text{ scheidet als Lösung aus})$$

$$g_2''(y) = \frac{40}{y^3} \implies g_2''(\sqrt{2}) > 0.$$

$g_2$  besitzt in  $y = \sqrt{2}$  ein lokales Minimum der Größe

$$g_2(\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} + 5 + \frac{20}{\sqrt{2}} = 5 + 20\sqrt{2}.$$

Es sei jetzt  $y = 1$  und  $1 \leq x \leq 10$ , also  $f(x, 1) := g_3(x) = x + \frac{50}{x} + 20$ . Es ist

$$g_3'(x) = 1 - \frac{50}{x^2} = 0 \iff x = \pm 5\sqrt{2} \quad (-5\sqrt{2} \text{ scheidet als Lösung aus})$$

$$g_3''(x) = \frac{100}{x^3} \implies g_3''(5\sqrt{2}) > 2.$$

$g_3$  besitzt in  $x = 5\sqrt{2}$  ein lokales Minimum der Größe

$$g_3(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} + \frac{50}{5\sqrt{2}} + 20 = 20 + 10\sqrt{2}.$$

Schließlich sei  $y = 10$  und  $1 \leq x \leq 10$ , also  $f(x, 10) := g_4(x) = 10x + \frac{50}{x} + 2$ .

Dann ist

$$g_4'(x) = 10 - \frac{50}{x^2} = 0 \iff x = \pm\sqrt{5} \quad (-\sqrt{5} \text{ scheidet als Lösung aus})$$

$$g_4''(x) = \frac{100}{x^3} \implies g_4''(\sqrt{5}) > 0.$$

$g_4$  besitzt in  $x = \sqrt{5}$  ein lokales Minimum der Größe

$$g_4(\sqrt{5}) = 10\sqrt{5} + \frac{50}{\sqrt{5}} + 2 = 2 + 20\sqrt{5}.$$

Wir betrachten noch  $f$  an den Eckpunkten des Definitionsbereiches.

$$f(1, 1) = 1 + 50 + 20 = 71, \quad f(1, 10) = 10 + 50 + 2 = 62,$$

$$f(10, 1) = 10 + 5 + 20 = 35, \quad f(10, 10) = 100 + 5 + 2 = 107.$$

Damit erhält man insgesamt:  $f$  besitzt genau ein lokales Minimum an der Stelle  $\bar{c} = (5, 2)$  der Größe  $f(5, 2) = 30$  und kein lokales Maximum.  $f(\bar{c})$  ist gleichzeitig globales Minimum von  $f$ . An der Stelle  $(10, 10)$  besitzt  $f$  ein globales Maximum der Größe  $f(10, 10) = 107$ .

(c) Sei  $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x - y)$  und  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .

Es ist

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \cos x + \cos(x - y), & f_y(x, y) &= \cos y - \cos(x - y), \\ f_{xx}(x, y) &= -\sin x - \sin(x - y), & f_{xy}(x, y) &= \sin(x - y) = f_{yx}(x, y), \\ f_{yy}(x, y) &= -\sin y - \sin(x - y). \end{aligned}$$

Aus  $\cos x + \cos(x - y) = 0$  und  $\cos y - \cos(x - y) = 0$  erhält man

$$\cos x + \cos y = 0, \quad \text{also} \quad \cos x = \cos y = 0$$

(denn für  $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$  ist stets  $\cos z \geq 0$ ).

Folglich ist  $x = y = \frac{\pi}{2}$ . Der einzige kritische Punkt  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  liegt nicht im Inneren von  $D(f)$ . Damit besitzt  $f$  kein lokales Extremum.

Wir untersuchen  $f$  auf dem Rande von  $D(f)$ .

Sei  $x = 0$  und  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ , also

$$f(0, y) := g_1(y) = \sin y + \sin(-y) = \sin y - \sin y = 0.$$

Sei  $x = \frac{\pi}{2}$  und  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ , also

$$f(\frac{\pi}{2}, y) := g_2(y) = 1 + \sin y + \sin(\frac{\pi}{2} - y).$$

Dann ist

$$g_2'(y) = \cos y - \cos(\frac{\pi}{2} - y) = 0 \implies \cos y = \cos(y - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - y),$$

also  $y = \frac{\pi}{4}$ . Weiterhin ist

$$g_2''(y) = -\sin y - \sin(\frac{\pi}{2} - y) \implies g_2''(\frac{\pi}{4}) = -2 \sin \frac{\pi}{4} < 0.$$

$g_2$  besitzt in  $y = \frac{\pi}{4}$  ein lokales Maximum der Größe

$$g_2(\frac{\pi}{4}) = 1 + 2 \sin \frac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}.$$

Sei  $y = 0$  und  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , also  $f(x, 0) := g_3(x) = 2 \sin x$ . Dann gilt:

$$g_3'(x) = 2 \cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} \quad (x = \frac{\pi}{2} \text{ liegt nicht im Inneren von } D(g_3)).$$

Sei nun  $y = \frac{\pi}{2}$  und  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , also

$$f(x, \frac{\pi}{2}) := g_4(x) = \sin x + 1 + \sin(x - \frac{\pi}{2}).$$

$g_4'(x) = \cos x + \cos(x - \frac{\pi}{2}) = 0$  besitzt keine Lösung, folglich hat  $g_4$  keinen kritischen Punkt.

Wir betrachten noch  $f$  in den Eckpunkten von  $D(f)$ .

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, \frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} + \sin(-\frac{\pi}{2}) = 0, \quad f(\frac{\pi}{2}, 0) = 2, \quad f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 2.$$

Insgesamt erhält man:  $f$  besitzt kein lokales Extremum. An den Stellen  $(0, y)$  mit  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  besitzt  $f$  ein globales Minimum der Größe 0 und an der Stelle  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$  ein globales Maximum der Größe  $1 + \sqrt{2}$ .