# Kapitel 12
# Aufgabensammlung

## 12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

**8.11** Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale und globale Extrema: **12/8/11/1**

(a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2, \quad -2 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 2,$

(b) $f(x,y) = x \cdot y + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \quad 1 \le x \le 10,\ 1 \le y \le 10,$

(c) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x-y), \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}.$

**Lösungshinweis zu Aufgabe 8.11** (a) $f$ besitzt an der Stelle $\overline{c} := (0,1)$ ein lokales Minimum der Größe $f(\overline{c}) = 0$; **12/8/11/2**

$f$ besitzt kein globales Maximum. Ein Vergleich mit den Funktionswerten auf dem Rande des Definitionsbereiches zeigt, daß $f(\overline{c})$ gleichzeitig globales Minimum ist.

An den Stellen $(\pm 2, -2)$ besitzt $f$ ein globales Maximum der Größe $f(\pm 2, -2) = 13$.

(b) An der Stelle $\overline{c} := (5,2)$ besitzt $f$ ein lokales Minimum der Größe $f(\overline{c}) = 30$; $f$ besitzt kein globales Maximum. Ein Vergleich mit den Funktionswerten auf dem Rande des Definitionsbereiches zeigt, daß $f(\overline{c})$ gleichzeitig globales Minimum ist.

An der Stelle $(10,10)$ besitzt $f$ ein globales Maximum der Größe $f(10,10) = 107$.

(c) $f$ besitzt kein lokales Extremum (im Inneren des Definitionsbereiches).
Die Einbeziehung der Funktionswerte auf dem Rande zeigt:
$f$ besitzt an den Stellen $(0,y)$ mit $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ ein globales Minimum der Größe $0$ und an der Stelle $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ ein globales Maximum der Größe $1 + \sqrt{2}$.

**Lösung zu Aufgabe 8.11** Sei $\overline{c}$ ein innerer Punkt des Definitionsbereiches von $f$ und $D := \begin{vmatrix} f_{xx}(\overline{c}) & f_{xy}(\overline{c}) \\ f_{xy}(\overline{c}) & f_{yy}(\overline{c}) \end{vmatrix}$. **12/8/11/3**

Ist $D > 0$, dann besitzt $f$ an der Stelle $\overline{c}$ ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Minimum bzw. Maximum, falls $f_{xx}(\overline{c}) > 0$ bzw. $f_{xx}(\overline{c}) < 0$ (vgl. 3/2/22). Um die globalen Extrema der Funktion $f$ zu finden, betrachten wir $f$ auch auf dem Rand des Definitionsbereiches, insbesondere in den Eckpunkten der rechteckigen Bereiche.

(a) Sei $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ und $-2 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 2$. Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte.
Es ist $f_x(x,y) = 2x$ und $f_y(x,y) = 2(y-1)$. Daraus ergibt sich der einzige kritische Punkt $\overline{c} := (0,1)$. Nur dort kann $f$ ein lokales Extremum besitzen (vgl. 8/3/18).
Es ist

$$D = f_{xx}(\overline{c}) \cdot f_{yy}(\overline{c}) - f_{xy}^2(\overline{c}) = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(\overline{c}) = 2 > 0.$$

Folglich besitzt $f$ an der Stelle $\overline{c}$ ein lokales Minimum der Größe $f(0,1) = 0$.
Wir betrachten jetzt $f$ auf dem Rand des Definitionsbereiches.
Sei $x = \pm 2$ und $-2 \le y \le 2$, also $f(\pm 2, y) := g_1(y) = 4 + (y-1)^2$.
Wir untersuchen $g_1$ (als Funktion der Veränderlichen $y$) auf lokale Extrema.

$$g_1'(y) = 2(y-1) = 0 \iff y = 1; \quad \text{und} \quad g_1''(y) = 2 > 0.$$

Folglich besitzt $g_1$ an der Stelle $y = 1$ ein lokales Minimum der Größe $g_1(1) = 4$
(dies ist nach unserer Definition kein lokales Extremum von $f(x,y)$ – vgl. 8/3/17).
Sei jetzt $y = -2$ und $-2 \le x \le 2$, also $f(x,-2) := g_2(x) = x^2 + 9$.

$$g_2'(x) = 2x = 0 \iff x = 0, \quad \text{und} \quad g_2''(x) = 2 > 0;$$

somit besitzt $g_2$ in $x = 0$ ein lokales Minimum der Größe $g_2(0) = 9$.
Schließlich sei $y = 2$ und $-2 \le x \le 2$, also $f(x,2) := g_3(x) = x^2 + 1$.

$$g_3'(x) = 2x = 0 \iff x = 0, \quad \text{und} \quad g_3''(x) = 2 > 0;$$

folglich besitzt $g_2$ in $x = 0$ ein lokales Minimum der Größe $g_3(0) = 1$.
Zur Bestimmung der globalen Extrema haben wir zum Vergleich noch die Funktionswerte von $f$ in den 4 Eckpunkten heranzuziehen:

$$f(\pm 2, -2) = 13 \quad \text{und} \quad f(\pm 2, 2) = 5.$$

Insgesamt erhält man somit: $f$ besitzt genau ein lokales Minimum an der Stelle $\overline{c} = (0,1)$ der Größe $f(\overline{c}) = 0$ und kein lokales Maximum. $f(\overline{c})$ ist gleichzeitig globales Minimum von $f$. An den Stellen $(\pm 2, -2)$ besitzt $f$ ein globales Maximum der Größe $f(\pm 2, -2) = 13$.

(b) Sei $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ und $1 \le x \le 10$, $1 \le y \le 10$. Es ist

$$f_x(x,y) = y - \frac{50}{x^2}, \quad f_y(x,y) = x - \frac{20}{y^2},$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{100}{x^3}, \quad f_{xy}(x,y) = 1 = f_{yx}(x,y) \quad \text{und} \quad f_{yy}(x,y) = \frac{40}{y^3}.$$

Aus $y - \frac{50}{x^2} = 0$ und $x - \frac{20}{y^2} = 0$ ergeben sich die kritischen Punkte. Es ist

$$y - \frac{50 \cdot y^4}{400} = 0 = y\left(1 - \frac{y^3}{8}\right) \iff y = 0 \text{ oder } y = 2$$

($y = 0$ scheidet als Lösung aus, liegt nicht im Inneren des Definitionsbereiches);
also $y = 2$ und $x = 5$. Einziger kritischen Punkt ist $\overline{c} = (5,2)$. Weiterhin ist

$$D = f_{xx}(\overline{c}) \cdot f_{yy}(\overline{c}) - f_{xy}^2(\overline{c}) = \frac{100}{5^3} \cdot \frac{40}{2^3} - 1 = 3 > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(\overline{c}) > 0.$$

Folglich besitzt $f$ an der Stelle $\overline{c}$ ein lokales Minimum der Größe

$$f(5,2) = 10 + \frac{50}{5} + \frac{20}{2} = 30.$$

Wir untersuchen jetzt $f$ auf dem Rande des Definitionsbereiches.
Sei $x = 1$ und $1 \le y \le 10$; also $f(1,y) := g_1(y) = y + 50 + \frac{20}{y}$. Es ist

$$g_1'(y) = 1 - \frac{20}{y^2} = 0 \iff y = \pm 2\sqrt{5}.$$

($-2\sqrt{5}$ scheidet als Lösung aus, liegt nicht im Definitionsbereich)

$$g_1''(y) = \frac{40}{y^3} \implies g_1''(2\sqrt{5}) > 0.$$

$g_1$ besitzt an der Stelle $y = 2\sqrt{5}$ ein lokales Minimum der Größe

$$g_1(2\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} + 50 + \frac{20}{2\sqrt{5}} = 50 + 4\sqrt{5}.$$

Sei $x = 10$ und $1 \le y \le 10$, also $f(10, y) := g_2(y) = 10y + 5 + \frac{20}{y}$. Dann ist

$$g_2'(y) = 10 - \frac{20}{y^2} = 0 \iff y = \pm\sqrt{2}. \quad (-\sqrt{2} \text{ scheidet als Lösung aus})$$

$$g_2''(y) = \frac{40}{y^3} \implies g_2''(\sqrt{2}) > 0.$$

$g_2$ besitzt in $y = \sqrt{2}$ ein lokales Minimum der Größe

$$g_2(\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} + 5 + \frac{20}{\sqrt{2}} = 5 + 20\sqrt{2}.$$

Es sei jetzt $y = 1$ und $1 \le x \le 10$, also $f(x, 1) := g_3(x) = x + \frac{50}{x} + 20$. Es ist

$$g_3'(x) = 1 - \frac{50}{x^2} = 0 \iff x = \pm 5\sqrt{2} \quad (-5\sqrt{2} \text{ scheidet als Lösung aus})$$

$$g_3''(x) = \frac{100}{x^3} \implies g_3''(5\sqrt{2}) > 2.$$

$g_3$ besitzt in $x = 5\sqrt{2}$ ein lokales Minimum der Größe

$$g_3(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} + \frac{50}{5\sqrt{2}} + 20 = 20 + 10\sqrt{2}.$$

Schließlich sei $y = 10$ und $1 \le x \le 10$, also $f(x, 10) := g_4(x) = 10x + \frac{50}{x} + 2$. Dann ist

$$g_4'(x) = 10 - \frac{50}{x^2} = 0 \iff x = \pm\sqrt{5} \quad (-\sqrt{5} \text{ scheidet als Lösung aus})$$

$$g_4''(x) = \frac{100}{x^3} \implies g_4''(\sqrt{5}) > 0.$$

$g_4$ besitzt in $x = \sqrt{5}$ ein lokales Minimum der Größe

$$g_4(\sqrt{5}) = 10\sqrt{5} + \frac{50}{\sqrt{5}} + 2 = 2 + 20\sqrt{5}.$$

Wir betrachten noch $f$ an den Eckpunkten des Definitionsbereiches.

$$f(1,1) = 1 + 50 + 20 = 71, \quad f(1,10) = 10 + 50 + 2 = 62,$$
$$f(10,1) = 10 + 5 + 20 = 35, \quad f(10,10) = 100 + 5 + 2 = 107.$$

Damit erhält man insgesamt: $f$ besitzt genau ein lokales Minimum an der Stelle $\overline{c} = (5, 2)$ der Größe $f(5, 2) = 30$ und kein lokales Maximum. $f(\overline{c})$ ist gleichzeitig globales Minimum von $f$. An der Stelle $(10, 10)$ besitzt $f$ ein globales Maximum der Größe $f(10, 10) = 107$.

(c) Sei $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x - y)$ und $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.
Es ist

$$f_x(x,y) = \cos x + \cos(x-y), \qquad f_y(x,y) = \cos y - \cos(x-y),$$
$$f_{xx}(x,y) = -\sin x - \sin(x-y), \quad f_{xy}(x,y) = \sin(x-y) = f_{yx}(x,y),$$
$$f_{yy}(x,y) = -\sin y - \sin(x-y).$$

Aus $\cos x + \cos(x-y) = 0$ und $\cos y - \cos(x-y) = 0$ erhält man

$$\cos x + \cos y = 0, \quad \text{also} \quad \cos x = \cos y = 0$$

(denn für $0 \le z \le \frac{\pi}{2}$ ist stets $\cos z \ge 0$).

Folglich ist $x = y = \frac{\pi}{2}$. Der einzige kritische Punkt $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ liegt nicht im Inneren von $D(f)$. Damit besitzt $f$ kein lokales Extremum.

Wir untersuchen $f$ auf dem Rande von $D(f)$.
Sei $x = 0$ und $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, also

$$f(0, y) := g_1(y) = \sin y + \sin(-y) = \sin y - \sin y = 0.$$

Sei $x = \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, also

$$f(\tfrac{\pi}{2}, y) := g_2(y) = 1 + \sin y + \sin(\tfrac{\pi}{2} - y).$$

Dann ist

$$g_2'(y) = \cos y - \cos(\tfrac{\pi}{2} - y) = 0 \implies \cos y = \cos(y - \tfrac{\pi}{2}) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - y),$$

also $y = \frac{\pi}{4}$. Weiterhin ist

$$g_2''(y) = -\sin y - \sin(\tfrac{\pi}{2} - y) \implies g_2''(\tfrac{\pi}{4}) = -2\sin\tfrac{\pi}{4} < 0.$$

$g_2$ besitzt in $y = \frac{\pi}{4}$ ein lokales Maximum der Größe

$$g_2(\tfrac{\pi}{4}) = 1 + 2\sin\tfrac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}.$$

Sei $y = 0$ und $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, also $f(x, 0) := g_3(x) = 2\sin x$. Dann gilt:

$$g_3'(x) = 2\cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} \quad (x = \tfrac{\pi}{2} \text{ liegt nicht im Inneren von } D(g_3)).$$

Sei nun $y = \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, also

$$f(x, \tfrac{\pi}{2}) := g_4(x) = \sin x + 1 + \sin(x - \tfrac{\pi}{2}).$$

$g_4'(x) = \cos x + \cos(x - \frac{\pi}{2}) = 0$ besitzt keine Lösung, folglich hat $g_4$ keinen kritischen Punkt.

Wir betrachten noch $f$ in den Eckpunkten con $D(f)$.

$$f(0,0) = 0, \quad f(0, \tfrac{\pi}{2}) = \sin\tfrac{\pi}{2} + \sin(-\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad f(\tfrac{\pi}{2}, 0) = 2, \quad f(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) = 2.$$

Insgesamt erhält man: $f$ besitzt kein lokales Extremum. An den Stellen $(0, y)$ mit $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ besitzt $f$ ein globales Minimum der Größe $0$ und an der Stelle $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ ein globales Maximum der Größe $1 + \sqrt{2}$.