Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.1 Es sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. **12/9/1/1**
Überprüfen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:

(a) Ist $f(x)$ eine periodische Funktion, so ist auch $F(x)$ periodisch.

(b) Ist $f(x)$ eine ungerade (bzw. gerade) Funktion, so ist $F(x)$ eine gerade (bzw. ungerade) Funktion.

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.1 (a) Die Aussage gilt nicht. **12/9/1/2**

(a) Die Aussage gilt.

Lösung zu Aufgabe 9.1 Im Folgenden sei F eine Stammfunktion von f in $\mathbb{R}$. **12/9/1/3**

(a) Offenbar ist $f(x) := \sin x + 1$ periodisch in $\mathbb{R}$ und
$F(x) := -\cos x + x$ ist (als eine Stammfunktion von f) nicht periodisch.

(b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und F die Stammfunktion von f mit der Eigenschaft $F(x_0) = 0$ (vgl. 9/1/4), und es gelte zunächst $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann erhält man für $g(x) = -x$ mit Hilfe der Substitutionsregel (vgl. 9/1/18 – 9/1/20):

$$\int_{x_0}^{x} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) = F(-x) \quad \text{und}$$

$$\int_{x_0}^{x} f(-x)\cdot(-x)'dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x), \quad \text{also}$$

$$F(-x) = F(x).$$

Folglich ist F gerade.

Sei jetzt $f(-x) = f(x)$. Analog wie oben erhält man:

$$\int_{x_0}^{x} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) = F(-x) \quad \text{und}$$

$$\int_{x_0}^{x} f(-x)\cdot(-x)'dx = -\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = -F(x), \quad \text{also}$$

$$F(-x) = -F(x).$$

Folglich ist F ungerade.