Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.2 Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale: **12/9/2/1**

(a) $\displaystyle\int x(x+1)(x-2)\,dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int (3x-5)^{10}\,dx,$ [Hinweis: Substitutionsregel],

(d) $\displaystyle\int x\sin x\,dx,$ [Hinweis: Partielle Integration].

Lösung zu Aufgabe 9.2 **12/9/2/3**

(a)
$$\int x(x+1)(x-2)\,dx = \int (x^3-x^2-2x)\,dx = \frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2+c.$$

(b)
$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx &= \int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4+x^2}\cdot\sqrt{4-x^2}}\,dx\\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int \frac{2\,dx}{\sqrt{4+x^2}}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+(\frac{x}{2})^2}} = (\star)\end{aligned}$$

Setzt man $\frac{x}{2} := t$, dann ist (vgl. 9/1/17: Grundintegrale; Achtung: beim drittletzten Integral tritt ein Vorzeichenfehler auf, unter der Wurzel muß x^2+1 stehen)

$$\begin{aligned}(\star) &= \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int \frac{2\,dt}{\sqrt{1+t^2}}\\ &= \arcsin t + 2\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+c\\ &= \arcsin\frac{x}{2} + 2\ln\left(\frac{x}{2}+\sqrt{1+(\tfrac{x}{2})^2}\right)+c.\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\int (3x-5)^{10}\,dx &= \frac{1}{3}\int t^{10}\,dt \quad (\text{für } 3x-5=t),\\ &= \frac{t^{11}}{33}+c = \frac{(3x-5)^{11}}{33}+c.\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= -x\cos x - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx\\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx\\ &= -x\cos x + \sin x + c.\end{aligned}$$