Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.2 Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale: **12/9/2/1**

(a) $\int x(x+1)(x-2)\,dx$,

(b) $\int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx$,

(c) $\int (3x-5)^{10}\,dx$, [Hinweis: Substitutionsregel],

(d) $\int x\sin x\,dx$, [Hinweis: Partielle Integration].

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.2 (a) $\int x(x+1)(x-2)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + c.$ **12/9/2/2**

(b) $\int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx = \arcsin\frac{x}{2} + 2\ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{1+(\frac{x}{2})^2}\right) + c.$

(c) $\int (3x-5)^{10}\,dx = \frac{(3x-5)^{11}}{33} + c.$

(d) $\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + c.$

Lösung zu Aufgabe 9.2 **12/9/2/3**

(a)
$$\int x(x+1)(x-2)\,dx = \int (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + c.$$

(b)
$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx &= \int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4+x^2}\cdot\sqrt{4-x^2}}\,dx \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int \frac{2\,dx}{\sqrt{4+x^2}} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+(\frac{x}{2})^2}} = (\star)\end{aligned}$$

Setzt man $\frac{x}{2} := t$, dann ist (vgl. 9/1/17: Grundintegrale; Achtung: beim drittletzten Integral tritt ein Vorzeichenfehler auf, unter der Wurzel muß x^2+1 stehen)

$$\begin{aligned}(\star) &= \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int \frac{2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \arcsin t + 2\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + c \\ &= \arcsin\frac{x}{2} + 2\ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{1+(\frac{x}{2})^2}\right) + c.\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\int (3x-5)^{10}\,dx &= \frac{1}{3}\int t^{10}\,dt \quad (\text{für } 3x-5=t), \\ &= \frac{t^{11}}{33} + c = \frac{(3x-5)^{11}}{33} + c.\end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + c.\end{aligned}$$