Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.3 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$. **12/9/3/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.3 Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung erhält man **12/9/3/2**

$$\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2} = \tfrac{1}{3} \ln|x+1| - \tfrac{1}{6} \ln(x^2 + 2) + \tfrac{\sqrt{2}}{6} \arctan \tfrac{x}{\sqrt{2}} + c.$$

Lösung zu Aufgabe 9.3 Durch Partialbruchzerlegung entsteht **12/9/3/3**

$$\frac{1}{x^3 + x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2},$$

wobei eine Nullstelle von $x^3 + x^2 + 2x + 2$ zu erraten war. Hieraus erhält man

$$1 = (A + B)x^2 + (B + C)x + (2A + C), \text{ also}$$

$$A + B = 0, \quad B + C = 0, \quad 2A + C = 1.$$

Als Lösung dieses linearen Gleichungssystems ergibt sich

$$A = C = \tfrac{1}{3} \quad \text{und } B = -\tfrac{1}{3}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2} &= \tfrac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \tfrac{1}{3} \int \frac{-x+1}{x^2+2}\, dx \\
&= \tfrac{1}{3} \ln|x+1| - \tfrac{1}{6} \int \frac{2x}{x^2+2}\, dx + \tfrac{1}{6} \int \frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2 + 1} \\
&= \tfrac{1}{3} \ln|x+1| - \tfrac{1}{6} \ln(x^2+2) + \tfrac{\sqrt{2}}{6} \int \frac{dt}{t^2+1} \quad (\text{für } t := \tfrac{x}{\sqrt{2}}) \\
&= \tfrac{1}{3} \ln|x+1| - \tfrac{1}{6} \ln(x^2+2) + \tfrac{\sqrt{2}}{6} \arctan \tfrac{x}{\sqrt{2}} + c.
\end{aligned}$$