Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.4 Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale $\int f(x)\,dx$: **12/9/4/1**

(a) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2+2x-8}$,

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$,

(c) $f(x) = \frac{1}{x^2+9}$,

(d) $f(x) = \frac{4x-3}{2x^2-3x}$,

(e) $f(x) = \frac{-2\cos x \sin x}{\cos^2 x}$,

(f) $f(x) = x \ln^2 x$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.4 (a) $\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8}\,dx = \frac{17}{6}\ln|x+4| + \frac{1}{6}\ln|x-2| + c.$ **12/9/4/2**

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a}{|a|}\arcsin\frac{x}{a} + c.$

(c) $\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + c.$

(d) $\int \frac{4x-3}{2x^2-3x}\,dx = \ln|2x^2-2x| + c.$

(e) $\int \frac{-2\cos x \sin x}{\cos^2 x}\,dx = \ln(\cos^2 x) + c.$

(f) $\int x \cdot \ln^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + c.$

Lösung zu Aufgabe 9.4 **12/9/4/3**

(a) Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung erhält man

$$\frac{3x-5}{x^2+2x-8} = \frac{3x-5}{(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2}, \quad \text{und somit}$$

$$3x-5 = (A+B)x + (-2A+4B), \quad \text{also}$$

$$A+B = 3 \quad \text{und} \quad -2A+4B = -5.$$

Als Lösung ergibt sich

$$A = \frac{17}{6} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{6}.$$

Folglich ist

$$\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8}\,dx = \frac{17}{6}\int \frac{dx}{x+4} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2}$$
$$= \frac{17}{6}\ln|x+4| + \frac{1}{6}\ln|x-2| + c.$$

(b) Für $a \neq 0$ und $x := at$ ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{|a|}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \frac{a}{|a|}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= \frac{a}{|a|}\arcsin\frac{x}{a} + c.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(\frac{x}{3})^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+1}$ (für $t := \frac{x}{3}$)

$\displaystyle\quad = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + c.$

(d) Wegen $(2x^2-3x)' = 4x-3$ ist

$$\int \frac{4x-3}{2x^2-3x}\,dx = \ln|2x^2-2x| + c.$$

Natürlich hätte man das Ergebnis – wenn auch umständlicher – mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung erhalten können.

(e) Wegen $(\cos^2 x)' = -2\cos x\sin x$ ist

$$\int \frac{-2\cos x\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \ln(\cos^2 x) + c \quad \text{oder}$$

$$\int \frac{-2\cos x\sin x}{\cos^2 x}\,dx = 2\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = 2\ln|\cos x| + c = \ln(\cos^2 x) + c.$$

(f) Mit Hilfe der partiellen Integration erhält man:

$$\begin{aligned}\int x\cdot\ln^2 x\,dx &= \frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \int x\cdot\ln x\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int\frac{x}{2}\,dx\right)\\ &= \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + c.\end{aligned}$$