Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.5 Beweisen Sie: Ist die Funktion f in dem Intervall $[a,b]$ stetig und nicht negativ **12/9/5/1**
und ist $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.
[Hinweis: Man führe den Beweis indirekt.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.5 Man schätze das Integral (nach unten) durch eine **12/9/5/2**
positive Untersumme ab.

Lösung zu Aufgabe 9.5 Angenommen, unter den gegebenen Voraussetzungen ist **12/9/5/3**
$f(c) \neq 0$ für ein $c \in [a,b]$, also $f(c) > 0$ und somit auch $\frac{f(c)}{2} > 0$.
Offenbar ist $g(x) := f(x) - \frac{f(c)}{2}$ in $[a,b]$ stetig und $g(c) > 0$. Folglich existiert eine Umgebung $U(c)$, so daß $g(x) > 0$ für alle $x \in U(c)$ (vgl. 6/3/44, Eigenschaft (2)) und daher $f(x) > \frac{f(c)}{2}$ für alle $x \in U(c)$.
Seien $a', b' \in [a,b]$ mit $a < a' < c < b' < b$. Dann ist $\mathfrak{z} = (a, a', b', b)$ eine Zerlegung von $[a,b]$, und für die entsprechende Untersumme von f gilt:

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) = (a'-a) \cdot \underbrace{\inf_{x \in [a,a']} f(x)}_{\geq 0} + (b'-a') \cdot \underbrace{\inf_{x \in [a',b']} f(x)}_{>0} + (b-b') \cdot \underbrace{\inf_{x \in [b',b]} f(x)}_{\geq 0} > 0.$$

Wegen $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \underline{\int\limits_a^b} f(x)\,dx \geq \underline{S}_f(\mathfrak{z}) > 0$ kann das Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ nicht null sein. Dies widerspricht der Voraussetzung. Also $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.