

## Kapitel 12 Aufgabensammlung

### 12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.8 Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

12/9/8/1

$$(a) \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, \quad (b) \int_0^1 e^{e^x} e^x dx, \quad (c) \int_0^2 x^3 e^x dx, \quad (d) \int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx.$$

**Lösung zu Aufgabe 9.8** Wir bestimmen zunächst jeweils eine Stammfunktion des entsprechenden Integranden. 12/9/8/3

(a) Für  $t := \sqrt{x}$  ist

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int e^t dt = 2e^{\sqrt{x}} + c, \quad \text{also} \\ \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= 2(e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}}) = 2(e^2 - e). \end{aligned}$$

(b) Für  $t := e^x$  ist

$$\begin{aligned} \int e^{e^x} e^x dx &= \int e^t dt = e^t + c = e^{e^x} + c, \quad \text{also} \\ \int_0^1 e^{e^x} e^x dx &= e^{e^1} - e^{e^0} = e^e - e. \end{aligned}$$

(c) Durch mehrfaches partielles Integrieren erhält man

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx \\ &= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6(x e^x - \int e^x dx) \\ &= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c, \quad \text{also} \\ \int_0^2 x^3 e^x dx &= 2e^2 + 6. \end{aligned}$$

(d) Für  $t := \ln x$  erhält man mit Hilfe der partiellen Integration

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx &= \int \ln t dt = \int 1 \cdot \ln t dt \\ &= t \cdot \ln t - \int dt = t(\ln t - 1) + c \\ &= \ln x (\ln(\ln x) - 1) + c, \quad \text{also} \\ \int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx &= \ln e^2 (\ln(\ln e^2) - 1) - \ln e (\ln(\ln e) - 1) \\ &= 2(\ln 2 - 1) - 1(0 - 1) = \ln 4 - 1. \end{aligned}$$