Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.8 Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale: **12/9/8/1**

(a) $\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$, (b) $\displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x\,dx$, (c) $\displaystyle\int\limits_0^2 x^3\mathrm{e}^x\,dx$, (d) $\displaystyle\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.8 (a) $\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2(\mathrm{e}^2-\mathrm{e})$. **12/9/8/2**

(b) $\displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}-\mathrm{e}$.

(c) $\displaystyle\int\limits_0^2 x^3\mathrm{e}^x\,dx = 2\mathrm{e}^2+6$.

(d) $\displaystyle\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx = \ln 4 - 1$.

Lösung zu Aufgabe 9.8 Wir bestimmen zunächst jeweils eine Stammfunktion des entsprechenden Integranden. **12/9/8/3**

(a) Für $t := \sqrt{x}$ ist

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \mathrm{e}^t\,dt = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + c, \quad \text{also}$$

$$\int\limits_1^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\Big(\mathrm{e}^{\sqrt{4}} - \mathrm{e}^{\sqrt{1}}\Big) = 2(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}).$$

(b) Für $t := \mathrm{e}^x$ ist

$$\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x\,dx = \int \mathrm{e}^t\,dt = \mathrm{e}^t + c = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + c, \quad \text{also}$$

$$\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^1} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}^0} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} - \mathrm{e}.$$

(c) Durch mehrfaches partielles Integrieren erhält man

$$\begin{aligned}\int x^3\mathrm{e}^x\,dx &= x^3\mathrm{e}^x - 3\int x^2\mathrm{e}^x\,dx \\ &= x^3\mathrm{e}^x - 3\Big(x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\,dx\Big) \\ &= x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6\Big(x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx\Big)\end{aligned}$$

$$= \mathrm{e}^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c, \quad \text{also}$$

$$\int_0^2 x^3\mathrm{e}^x\,dx = 2\mathrm{e}^2 + 6.$$

(d) Für $t := \ln x$ erhält man mit Hilfe der partiellen Integration

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx &= \int \ln t\,dt = \int 1\cdot\ln t\,dt \\
&= t\cdot\ln t - \int dt = t(\ln t - 1) + c \\
&= \ln x\Big(\ln(\ln x) - 1\Big) + c, \quad \text{also} \\
\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx &= \ln \mathrm{e}^2\Big(\ln(\ln \mathrm{e}^2) - 1\Big) - \ln \mathrm{e}\Big(\ln(\ln \mathrm{e}) - 1\Big) \\
&= 2(\ln 2 - 1) - 1(0 - 1) = \ln 4 - 1.
\end{aligned}$$