Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.10 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von oben bzw. von unten durch $y = \sqrt{r^2 - x^2},\ r > 0$ bzw. durch $y = \frac{\sqrt{2}}{r} \cdot x^2$ begrenzt wird. **12/9/10/1**

Lösung zu Aufgabe 9.10 Wir berechnen zunächst die Schnittpunkte beider Kurven. **12/9/10/3**
Aus $\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{\sqrt{2}}{r} x^2$ erhält man $x^4 + \frac{r^2}{2} x^2 - \frac{r^4}{2} = 0$ und somit $x_{1,2}^2 = -\frac{r^2}{4} \pm \frac{3}{4} r^2$.

$-r^2$ scheidet als Lösung aus, da ein Quadrat (in $\mathbb{R}$) nicht negativ sei kann. Es bleibt $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r$. Als Schnittpunkte ergeben sich also $a := -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r$ und $b := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r$.
Der Flächeninhalt A ist dann gegeben durch

$$
\begin{aligned}
A &= \int_a^b \Big(\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{\sqrt{2}}{r} x^2 \Big)\, dx \\
&= \int_a^b \sqrt{r^2 - x^2}\, dx - \Big[\frac{\sqrt{2}}{3r} x^3 \Big]_a^b \\
&= \int_a^b \sqrt{r^2 - x^2}\, dx - \frac{r^2}{3}.
\end{aligned}
$$

Wir berechnen zunächst das unbestimmte Integral $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$.
Für $t := \frac{x}{r}$ ist

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = r \int \sqrt{1 - (\tfrac{x}{r})^2}\, dx = r^2 \int \sqrt{1 - t^2}\, dt.$$

Für $t := \sin z$, also $z = \arcsin t = \arcsin \frac{x}{r}$ ist

$$\int \sqrt{1 - t^2}\, dt = \int \sqrt{1 - \sin^2 z} \cdot \cos z\, dz = \int \cos^2 z\, dz.$$

Durch partielles Integrieren erhält man

$$
\begin{aligned}
\int \cos^2 z\, dz &= \sin z \cos z + \int \sin^2 z\, dz \\
&= \sin z \cos z + \int (1 - \cos^2 z)\, dz \\
&= \sin z \cos z + z - \int \cos^2 z\, dz
\end{aligned}
$$

und somit

$$\int \cos^2 z\, dz = \tfrac{1}{2} \sin z \cos z + \tfrac{z}{2} + c.$$

Also

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx &= r^2 \int \cos^2 z\, dz \\
&= r^2 \Big(\tfrac{1}{2} \sin z \cdot \sqrt{1 - \sin^2 z} + \tfrac{z}{2} \Big) + c \\
&= r^2 \Big(\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{x}{r} \cdot \sqrt{1 - (\tfrac{x}{r})^2} + \tfrac{1}{2} \arcsin \tfrac{x}{r} \Big) + c \\
&= \tfrac{x}{2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + \tfrac{r^2}{2} \arcsin \tfrac{x}{r} + c,
\end{aligned}
$$

und wegen $a = -b$ ist

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{r^2 - x^2}\, dx &= \tfrac{b}{2} \cdot \sqrt{r^2 - b^2} + \tfrac{r^2}{2} \arcsin \tfrac{b}{r} + \tfrac{b}{2} \cdot \sqrt{r^2 - b^2} - \tfrac{r^2}{2} \arcsin(-\tfrac{b}{r}) \\
&= b \cdot \sqrt{r^2 - b^2} + r^2 \arcsin \tfrac{b}{r} \\
&= r^2 \Big(\tfrac{1}{2} + \arcsin \tfrac{1}{\sqrt{2}} \Big).
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
A = r^2 \Big(\tfrac{1}{2} + \arcsin \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{3} \Big) = r^2 \Big(\tfrac{1}{6} + \arcsin \tfrac{1}{\sqrt{2}} \Big).
$$