

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.10 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von oben bzw. von unten durch $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $r > 0$ bzw. durch $y = \frac{\sqrt{2}}{r} \cdot x^2$ begrenzt wird. 12/9/10/1

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.10 Der Flächeninhalt beträgt $r^2(\frac{1}{6} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}})$. 12/9/10/2

Lösung zu Aufgabe 9.10 Wir berechnen zunächst die Schnittpunkte beider Kurven. Aus $\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{\sqrt{2}}{r}x^2$ erhält man $x^4 + \frac{r^2}{2}x^2 - \frac{r^4}{2} = 0$ und somit $x_{1,2}^2 = -\frac{r^2}{4} \pm \frac{3}{4}r^2$.

$-r^2$ scheidet als Lösung aus, da ein Quadrat (in \mathbb{R}) nicht negativ sein kann. Es bleibt $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r$. Als Schnittpunkte ergeben sich also $a := -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r$ und $b := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r$.

Der Flächeninhalt A ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \left(\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{\sqrt{2}}{r} x^2 \right) dx \\ &= \int_a^b \sqrt{r^2 - x^2} dx - \left[\frac{\sqrt{2}}{3r} x^3 \right]_a^b \\ &= \int_a^b \sqrt{r^2 - x^2} dx - \frac{r^2}{3}. \end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst das unbestimmte Integral $\int \sqrt{r^2 - x^2} dx$.

Für $t := \frac{x}{r}$ ist

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx = r \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} dx = r^2 \int \sqrt{1 - t^2} dt.$$

Für $t := \sin z$, also $z = \arcsin t = \arcsin \frac{x}{r}$ ist

$$\int \sqrt{1 - t^2} dt = \int \sqrt{1 - \sin^2 z} \cdot \cos z dz = \int \cos^2 z dz.$$

Durch partielles Integrieren erhält man

$$\begin{aligned} \int \cos^2 z dz &= \sin z \cos z + \int \sin^2 z dz \\ &= \sin z \cos z + \int (1 - \cos^2 z) dz \\ &= \sin z \cos z + z - \int \cos^2 z dz \end{aligned}$$

und somit

$$\int \cos^2 z dz = \frac{1}{2} \sin z \cos z + \frac{z}{2} + c.$$

Also

$$\begin{aligned}\int \sqrt{r^2 - x^2} dx &= r^2 \int \cos^2 z dz \\ &= r^2 \left(\frac{1}{2} \sin z \cdot \sqrt{1 - \sin^2 z} + \frac{z}{2} \right) + c \\ &= r^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{r} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{r} \right) + c \\ &= \frac{x}{2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + c,\end{aligned}$$

und wegen $a = -b$ ist

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \frac{b}{2} \cdot \sqrt{r^2 - b^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{b}{r} + \frac{b}{2} \cdot \sqrt{r^2 - b^2} - \frac{r^2}{2} \arcsin \left(-\frac{b}{r}\right) \\ &= b \cdot \sqrt{r^2 - b^2} + r^2 \arcsin \frac{b}{r} \\ &= r^2 \left(\frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \right).\end{aligned}$$

Damit ist

$$A = r^2 \left(\frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \right) = r^2 \left(\frac{1}{6} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$