Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.13 Es sei $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-1,0], \\ 1 & \text{für } x \in (0,1]. \end{cases}$ **12/9/13/1**

Zeigen Sie, daß f in $[-1,1]$ bestimmt integrierbar ist dort aber keine Stammfunktion besitzt.

[Hinweis: Beweis indirekt; eine Stammfunktion müßte insbesondere an der Stelle 0 differenzierbar sein.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.13 Für die Zerlegung $\mathfrak{z} = (-1, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1)$ von $[-1,1]$ ist $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \frac{4}{n}$. Hieraus folgt die bestimmte Integrierbarkeit von f. **12/9/13/2**

Eine Stammfunktion von f müßte an der Stelle 0 differenzierbar sein. Dies führt aber zum Widerspruch.

Lösung zu Aufgabe 9.13 Wir zeigen die bestimmte Integrierbarkeit von f mit Hilfe des Riemannschen Integrierbarkeitskriteriums (vgl. 9/3/1). **12/9/13/3**

Es sei $\mathfrak{z} = (-1, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1) = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ eine Zerlegung von $[-1,1]$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $I_i := [a_i, a_{i+1}]$. Weiterhin sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für die Differenz von Ober- und Untersumme von f bei der Zerlegung $\mathfrak{z}$:

$$\begin{aligned}\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^{2} (a_{i+1} - a_i) \cdot \Big(\sup_{x \in I_i} f(x) - \inf_{x \in I_i} f(x) \Big) \\ &= (a_2 - a_1) \cdot \Big(\sup_{x \in I_2} f(x) - \inf_{x \in I_2} f(x) \Big) \\ &= \frac{4}{n} < \varepsilon, \quad \text{für hinreichend große } n.\end{aligned}$$

Folglich ist f in $[-1,1]$ bestimmt integrierbar.

Angenommen, f besitzt in $[-1,1]$ eine Stammfunktion F, dann ist F insbesondere an der Stelle $c = 0$ differenzierbar. Folglich existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten von F an der Stelle 0, insbesondere existiert der rechtsseitige Grenzwert (vgl. 6/3/52).

Für $x > 0$ ist $\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{1 - (-1)}{x} = \frac{2}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \infty$.

Dies widerspricht der Annahme. Damit besitzt F in $[-1,1]$ keine Stammfunktion.