Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.14 Es sei $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\frac{\pi}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$ **12/9/14/1**

Zeigen Sie, daß f in $I = [-1, 1]$ differenzierbar ist (also f' in I eine Stammfunktion besitzt), aber f' in I nicht bestimmt integrierbar ist.

[Hinweis: f' ist in I nicht beschränkt.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.14 Der Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle 0 existiert. Damit ist f in 0 differenzierbar. **12/9/14/2**

Da f' in $[-1, 1]$ nicht beschränkt ist, ist f' dort auch nicht im Riemannschen Sinne integrierbar.

Lösung zu Aufgabe 9.14 Für $x \neq 0$ ist f in $[-1, 1]$ differenzierbar, denn f ist eine „rationale Zusammensetzung" differenzierbarer Funktionen, und es gilt: **12/9/14/3**

$$f'(x) = 2x \cdot \cos\frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x} \cdot \sin\frac{\pi}{x^2}.$$

An der Stelle 0 berechnen wir den Limes des Differenzenquotienten von f:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cdot \cos\frac{\pi}{x^2} - 0}{x} = x \cdot \cos\frac{\pi}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0,$$

denn $\cos\frac{\pi}{x^2}$ ist beschränkt für $x \neq 0$. Damit ist f in $[-1, 1]$ differenzierbar, und f ist eine Stammfunktion von f' mit

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \cos\frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x} \cdot \sin\frac{\pi}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Eine Voraussetzung für die bestimmte Integrierbarkeit einer Funktion ist ihre Beschränktheit in dem betrachteten Intervall. Wir zeigen, daß f in $[-1, 1]$ nicht beschränkt ist.

Offenbar gilt: $2x \cdot \cos\frac{\pi}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$

Für $x_n := \sqrt{\frac{2\pi}{\pi + 4n}}$ ist (x_n) eine Nullfolge und $\sin\frac{\pi}{x_n^2} = 1$ für alle n. Folglich gilt:

$$\frac{2\pi}{x_n} \cdot \sin\frac{\pi}{x_n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty, \quad \text{also} \quad f'(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty.$$

Damit ist f' in $[-1, 1]$ nicht beschränkt und demzufolge nicht bestimmt integrierbar.