Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.15 Berechnen Sie das Volumen eines Torus. (Drehung einer Kreisscheibe um die x-Achse mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $(0, R)$.) **12/9/15/1**

Lösung zu Aufgabe 9.15 Wir betrachten die Gleichung $(y-R)^2 + x^2 = r^2$ eines Kreises mit dem Mittelpunkt $(0, R)$ und dem Radius r. Die Auflösung der Gleichung nach y ergibt: **12/9/15/3**

$$y = f(x) := R + \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{bzw.} \quad y = g(x) := R - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Der entsprechende Rotationskörper ist gegeben durch

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(f^2(x) - g^2(x) \right) dx = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Nach Aufgabe 9.10 ist

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \tfrac{x}{2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + \tfrac{r^2}{2} \arcsin \tfrac{x}{r} + c, \quad \text{also}$$

$$\begin{aligned} V &= 4\pi R \cdot \left[\tfrac{x}{2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + \tfrac{r^2}{2} \arcsin \tfrac{x}{r} \right]_{-r}^{r} \\ &= 4\pi R \Big(0 + \tfrac{r^2}{2} \arcsin 1 - (0 + \tfrac{r^2}{2} \arcsin(-1)\,) \Big) \\ &= 4\pi R r^2 \arcsin 1 = 2 r^2 R \pi^2. \end{aligned}$$