

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.15 Berechnen Sie das Volumen eines Torus. (Drehung einer Kreisscheibe um die x -Achse mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $(0, R)$.) 12/9/15/1

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.15 Für $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ und $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ beträgt das Volumen des Torus: 12/9/15/2

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^r (f^2(x) - g^2(x)) dx = 2r^2 R \pi^2.$$

Lösung zu Aufgabe 9.15 Wir betrachten die Gleichung $(y - R)^2 + x^2 = r^2$ eines Kreises mit dem Mittelpunkt $(0, R)$ und dem Radius r . Die Auflösung der Gleichung nach y ergibt: 12/9/15/3

$$y = f(x) := R + \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{bzw.} \quad y = g(x) := R - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Der entsprechende Rotationskörper ist gegeben durch

$$V = \pi \int_{-r}^r (f^2(x) - g^2(x)) dx = 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Nach Aufgabe 9.10 ist

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + c, \quad \text{also}$$

$$\begin{aligned} V &= 4\pi R \cdot \left[\frac{x}{2} \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} \right]_{-r}^r \\ &= 4\pi R \left(0 + \frac{r^2}{2} \arcsin 1 - \left(0 + \frac{r^2}{2} \arcsin(-1) \right) \right) \\ &= 4\pi R r^2 \arcsin 1 = 2r^2 R \pi^2. \end{aligned}$$