Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.16 Es sei $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx.$ **12/9/16/1**

Ermitteln Sie eine Rekursionsformel für I_n und berechnen Sie I_n.

Lösung zu Aufgabe 9.16 Für $n \geq 2$ erhält man durch partielle Integration **12/9/16/3**

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx \\
&= \Big[\sin^{n-1} x \cdot (-\cos x) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x \cdot (-\cos x) \, dx \\
&= 0 + (n-1) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx \\
&= (n-1) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx.
\end{aligned}$$

Also

$$n \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = (n-1) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx$$

und somit

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}.$$

Hieraus erhält man (induktiv) für $n = 2m$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx &= \frac{2m-1}{2m} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-2} x \, dx \\
&= \frac{(2m-1)(2m-3) \cdots 1}{2m(2m-2) \cdots 2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot dx \\
&= \frac{(2m-1)(2m-3) \cdots 1}{2m(2m-2) \cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

und für $n = 2m+1$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx &= \frac{2m}{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x \, dx \\
&= \frac{2m(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \\
&= \frac{2m(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3} \, .
\end{aligned}
$$