

## Kapitel 12 Aufgabensammlung

### 12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

**9.16** Es sei  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ . 12/9/16/1

Ermitteln Sie eine Rekursionsformel für  $I_n$  und berechnen Sie  $I_n$ .

**Lösungshinweis zu Aufgabe 9.16** Es ist  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$  12/9/16/2

Für  $n = 2m$  bzw.  $n = 2m + 1$  ist

$$I_n = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{2m(2m-2)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{bzw.} \quad I_n = \frac{2m(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3}.$$

**Lösung zu Aufgabe 9.16** Für  $n \geq 2$  erhält man durch partielle Integration 12/9/16/3

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx \\ &= \left[ \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx. \end{aligned}$$

Also

$$n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx$$

und somit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}.$$

Hieraus erhält man (induktiv) für  $n = 2m$ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx = \frac{2m-1}{2m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-2} x \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{2m(2m-2)\cdots 2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot dx \\
&= \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{2m(2m-2)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

und für  $n = 2m + 1$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx &= \frac{2m}{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x \, dx \\
&= \frac{2m(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \\
&= \frac{2m(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3} \cdot
\end{aligned}$$