

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.17 Beweisen Sie, daß für $0 < a, b$ gilt:

12/9/17/1

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2bx}} = \begin{cases} 2 & \text{für } b \leq a, \\ \frac{2a}{b} & \text{für } a < b. \end{cases}$$

Lösung zu Aufgabe 9.17 Für $0 < a, b$ und $t := a^2 + b^2 - 2bx$ gilt:

12/9/17/3

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2bx}} = -\frac{1}{2b} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{b} \cdot \sqrt{t} + c = -\frac{1}{b} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2bx} + c.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2bx}} &= -\frac{1}{b} \left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} - \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} \right) \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{b} \left((a-b) - (a+b) \right) & \text{für } b \leq a, \\ -\frac{1}{b} \left(-(a-b) - (a+b) \right) & \text{für } a < b \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2 & \text{für } b \leq a, \\ \frac{2a}{b} & \text{für } a < b. \end{cases} \end{aligned}$$