Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.17 Beweisen Sie, daß für $0 < a,\ b$ gilt: **12/9/17/1**

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2-2bx}} = \begin{cases} 2 & \text{für } b \le a, \\ \frac{2a}{b} & \text{für } a < b. \end{cases}$$

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.17 Es ist $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2-2bx}} = -\frac{1}{b}\Big(\sqrt{a^2+b^2-2ab} - \sqrt{a^2+b^2+2ab}\Big)$. **12/9/17/2**

Hieraus folgt die Behauptung.

Lösung zu Aufgabe 9.17 Für $0 < a,\ b$ und $t := a^2+b^2-2bx$ gilt: **12/9/17/3**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2-2bx}} = -\frac{1}{2b}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{b}\cdot\sqrt{t} + c = -\frac{1}{b}\cdot\sqrt{a^2+b^2-2bx} + c.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2-2bx}} &= -\frac{1}{b}\Big(\sqrt{a^2+b^2-2ab} - \sqrt{a^2+b^2+2ab}\Big) \\
&= \begin{cases} -\frac{1}{b}\Big((a-b)-(a+b)\Big) & \text{für } b \le a, \\ -\frac{1}{b}\Big(-(a-b)-(a+b)\Big) & \text{für } a < b \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2 & \text{für } b \le a, \\ \frac{2a}{b} & \text{für } a < b\,. \end{cases}
\end{aligned}$$