Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.18 Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz: **12/9/18/1**

(a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, (b) $\int\limits_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$, (c) $\int\limits_0^\pi \tan x\, dx$, (d) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^2}$,

(e) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$, (f) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{x+1}$, (g) $\int\limits_0^\infty \sin 3x\, dx$, (h) $\int\limits_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2}\, dx$.

Lösung zu Aufgabe 9.18 **12/9/18/3**

(a) Für $x > 0$ ist $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\cdot\sqrt{x} + c$ und somit

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \int\limits_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} (2 - 2\cdot\sqrt{a}) = 2.$$

(b) Für $|x| < 3$ und $x := 3\sin t$, also $t = \arcsin\frac{x}{3}$ gilt:

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}} = 9\int \sin^2 t\, dt.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\int \sin^2 t\, dt &= -\sin t\cos t - \int \cos t(-\cos t)\, dt\\ &= -\sin t\cos t + \int dt - \int \sin^2 t\, dt \implies\end{aligned}$$

$$\int \sin^2 t\, dt = \tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{2}\sin t\cos t + c.$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \tfrac{9}{2}(t - \sin t\cos t) + c\\ &= \tfrac{9}{2}(t - \sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}\,) + c\\ &= \tfrac{9}{2}\arcsin\tfrac{x}{3} - \tfrac{x}{2}\cdot\sqrt{9-x^2} + c.\end{aligned}$$

Für $0 < b < 3$ ist dann

$$\begin{aligned}\int\limits_0^3 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \lim_{\substack{x\to b\\ b<3}} \int\limits_0^b \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}}\\ &= \lim_{\substack{x\to b\\ b<3}} \Big(\tfrac{9}{2}\arcsin\tfrac{b}{3} - \tfrac{b}{2}\cdot\sqrt{9-b^2} - \tfrac{9}{2}\arcsin 0 - 0\Big)\\ &= \tfrac{9}{2}\arcsin 1 - \tfrac{3}{2}\cdot\sqrt{9-9} - 0 = \tfrac{9\pi}{4}.\end{aligned}$$

(c) Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ gilt:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| + c.$$

Folglich ist für $0 < a < \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^a \tan x\, dx = -\ln|\cos a| + \ln|\cos 0| = -\ln|\cos a| \xrightarrow[a\to\frac{\pi}{2}]{} \infty.$$

Analog erhält man für $\frac{\pi}{2} < b < \pi$:

$$\int_b^{\frac{\pi}{2}} \tan x\, dx = -\ln|\cos\tfrac{\pi}{2}| + \ln|\cos b| \xrightarrow[b\to\frac{\pi}{2}]{} -\infty.$$

(d) Für $x \geq 2$ und $b \geq 2$ ist

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c, \quad \text{also}$$

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\Big(-\frac{1}{b} + \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}.$$

(e) Für $a \geq 0$ ist

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty}(\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}.$$

(f) Für $x \neq 1$ ist

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + c.$$

Folglich gilt für $-\infty < c < b < -1 < a < 0$:

$$\int_a^0 \frac{dx}{x+1} = \ln 1 - \ln(a+1) = -\ln(a+1) \xrightarrow[a\to-1]{} \infty.$$

Analog gilt auch

$$\int_c^b \frac{dx}{x+1} = \ln|b+1| - \ln|c+1| = \ln\left|\frac{b+1}{c+1}\right| \xrightarrow[\substack{b\to-1\\ c\to-\infty}]{} -\infty.$$

Das uneigentliche Integral konvergiert nicht.

(g) Sei $0 < b$. Dann ist

$$\int_0^b \sin 3x\, dx = \Big[-\frac{1}{3}\cos 3x\Big]_0^b$$
$$= -\frac{1}{3}\cos 3b + \frac{1}{3}.$$

Für $b \to \infty$ existiert der Grenzwert nicht, folglich ist das uneigentliche Integral nicht konvergent.

(h) Für $g(x) := -x^2$ und $f(z) := e^z$ ist $F(z) = e^z$ eine Stammfunktion von f und es gilt (vgl. 9/1/20):

$$\int x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int g'(x)f(g(x))\,dx = -\frac{1}{2}F(g(x)) + c.$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + c.$$

Folglich ist für $0 < b$:

$$\int_0^\infty x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\Big(-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-b^2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^0\Big) = \tfrac{1}{2}.$$