

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.18 Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz :

12/9/18/1

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad (b) \int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}, \quad (c) \int_0^\pi \tan x dx, \quad (d) \int_2^\infty \frac{dx}{x^2},$$

$$(e) \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}, \quad (f) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x+1}, \quad (g) \int_0^\infty \sin 3x dx, \quad (h) \int_0^\infty x e^{-x^2} dx.$$

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.18 (a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$

12/9/18/2

(b) $\int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ b < 3}} \int_0^b \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{9\pi}{4}.$

(c) Das uneigentliche Integral konvergiert nicht.

(d) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}.$

(e) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$

(f) Das uneigentliche Integral konvergiert nicht.

(g) Das uneigentliche Integral konvergiert nicht.

(h) $\int_0^\infty x \cdot e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}.$

Lösung zu Aufgabe 9.18

12/9/18/3

(a) Für $x > 0$ ist $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \cdot \sqrt{x} + c$ und somit

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} (2 - 2 \cdot \sqrt{a}) = 2.$$

(b) Für $|x| < 3$ und $x := 3 \sin t$, also $t = \arcsin \frac{x}{3}$ gilt :

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} = 9 \int \sin^2 t dt.$$

Weiterhin ist

$$\int \sin^2 t dt = -\sin t \cos t - \int \cos t (-\cos t) dt$$

$$= -\sin t \cos t + \int dt - \int \sin^2 t dt \implies$$

$$\int \sin^2 t dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin t \cos t + c.$$

Folglich gilt :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \frac{9}{2}(t - \sin t \cos t) + c \\ &= \frac{9}{2}(t - \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t}) + c \\ &= \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \cdot \sqrt{9-x^2} + c. \end{aligned}$$

Für $0 < b < 3$ ist dann

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ b < 3}} \int_0^b \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ b < 3}} \left(\frac{9}{2} \arcsin \frac{b}{3} - \frac{b}{2} \cdot \sqrt{9-b^2} - \frac{9}{2} \arcsin 0 - 0 \right) \\ &= \frac{9}{2} \arcsin 1 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{9-9} - 0 = \frac{9\pi}{4}. \end{aligned}$$

(c) Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ gilt :

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + c.$$

Folglich ist für $0 < a < \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^a \tan x dx = -\ln |\cos a| + \ln |\cos 0| = -\ln |\cos a| \xrightarrow{a \rightarrow \frac{\pi}{2}} \infty.$$

Analog erhält man für $\frac{\pi}{2} < b < \pi$:

$$\int_b^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx = -\ln |\cos \frac{\pi}{2}| + \ln |\cos b| \xrightarrow{b \rightarrow \frac{\pi}{2}} -\infty.$$

(d) Für $x \geq 2$ und $b \geq 2$ ist

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2} &= -\frac{1}{x} + c, \quad \text{also} \\ \int_2^\infty \frac{dx}{x^2} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(e) Für $a \geq 0$ ist

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}.$$

(f) Für $x \neq -1$ ist

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln |x+1| + c.$$

Folglich gilt für $-\infty < c < b < -1 < a < 0$:

$$\int_a^0 \frac{dx}{x+1} = \ln 1 - \ln(a+1) = -\ln(a+1) \xrightarrow{a \rightarrow -1} \infty.$$

Analog gilt auch

$$\int_c^b \frac{dx}{x+1} = \ln|b+1| - \ln|c+1| = \ln\left|\frac{b+1}{c+1}\right| \xrightarrow[\substack{b \rightarrow -1 \\ c \rightarrow -\infty}]{} -\infty.$$

Das uneigentliche Integral konvergiert nicht.

(g) Sei $0 < b$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_0^b \sin 3x \, dx &= \left[-\frac{1}{3} \cos 3x\right]_0^b \\ &= -\frac{1}{3} \cos 3b + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Für $b \rightarrow \infty$ existiert der Grenzwert nicht, folglich ist das uneigentliche Integral nicht konvergent.

(h) Für $g(x) := -x^2$ und $f(z) := e^z$ ist $F(z) = e^z$ eine Stammfunktion von f und es gilt (vgl. 9/1/20):

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{-x^2} \, dx &= -\frac{1}{2} \int (-2x) e^{-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} \int g'(x) f(g(x)) \, dx = -\frac{1}{2} F(g(x)) + c. \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c. \end{aligned}$$

Folglich ist für $0 < b$:

$$\int_0^\infty x \cdot e^{-x^2} \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x \cdot e^{-x^2} \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-b^2} + \frac{1}{2} e^0\right) = \frac{1}{2}.$$