

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

- 9.19** (a) Berechnen Sie die Bogenlänge der durch $f(x) = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ im Intervall $[0, 2]$ definierten Kurve. 12/9/19/1
- (b) Bestimmen Sie die Länge der Schraubenlinie mit dem Radius r und der Ganghöhe $c \cdot 2\pi$ für einen Gewindengang.
- (c) Es sei $\bar{f}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (Parameterdarstellung der Astroide).
Bestimmen Sie die Länge des gegebenen Kurvenstücks.

Lösung zu Aufgabe 9.19

12/9/19/3

- (a) Offenbar ist f in $[0, 2]$ stetig differenzierbar. Folglich ist die Länge der von f dargestellten Kurve \mathfrak{k} gegeben durch

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^2 \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (\text{vgl. 9/8/12})$$

Es ist $f'(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x$, also

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{1 + 4x^2(x^2 + 1)} = 2 \cdot \sqrt{(x^2 + \frac{1}{2})^2} = 2x^2 + 1.$$

Damit ist

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^2 (2x^2 + 1) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^2 = \frac{2}{3} \cdot 8 + 2 = \frac{22}{3}.$$

- (b) Die Schraubenlinie ist gegeben durch $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\bar{f}(t) = (r \cos t, r \sin t, c \cdot t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$.
Offenbar ist \bar{f} stetig differenzierbar in $[0, 2\pi]$, folglich ist

$$\begin{aligned} l(\mathfrak{k}) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sum_{i=0}^3 (f'_i(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + c^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2} dt = \sqrt{r^2 + c^2} \cdot 2\pi. \end{aligned}$$

- (c) $\bar{f}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t) = (f_1(t), f_2(t))$ ist in $[0, \frac{\pi}{2}]$ stetig differenzierbar, also

$$l(\mathfrak{k}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t)} dt.$$

Es ist

$$\begin{aligned} f_1'^2(t) + f_2'^2(t) &= (3a \cos^2 t \cdot (-\sin t))^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2 \\ &= 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t) \end{aligned}$$

$= 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t.$

Folglich ist $\sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2} = 3a \cos t \sin t$ und somit

$$l(\mathfrak{K}) = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \, dt = 3a \left[\frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}.$$