Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.19 (a) Berechnen Sie die Bogenlänge der durch $f(x) = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$ im Intervall $[0,2]$ definierten Kurve. **12/9/19/1**

(b) Bestimmen Sie die Länge der Schraubenlinie mit dem Radius r und der Ganghöhe $c \cdot 2\pi$ für einen Gewindegang.

(c) Es sei $\bar{f}(t) = (a\cos^3 t,\, a\sin^3 t)$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (Parameterdarstellung der Astroide).
Bestimmen Sie die Länge des gegebenen Kurvenstücks.

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.19 (a) Die Länge der Kurve beträgt $\int\limits_0^2 \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx = \frac{22}{3}$. **12/9/19/2**

(b) Die Länge der Schraubenlinie beträgt $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2+c^2}\, dt = \sqrt{r^2+c^2} \cdot 2\pi$.

(c) Die Länge der Astroide beträgt $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 3a \cdot \cos t \cdot \sin t\, dt = \frac{3a}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 9.19 **12/9/19/3**

(a) Offenbar ist f in $[0,2]$ stetig differenzierbar. Folglich ist die Länge der von f dargestellten Kurve $\mathfrak{k}$ gegeben durch

$$l(\mathfrak{k}) = \int\limits_0^2 \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx. \quad \text{(vgl. 9/8/12)}$$

Es ist $f'(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x$, also

$$\sqrt{1+f'^2(x)} = \sqrt{1+4x^2(x^2+1)} = 2 \cdot \sqrt{(x^2+\tfrac{1}{2})^2} = 2x^2+1.$$

Damit ist

$$l(\mathfrak{k}) = \int\limits_0^2 (2x^2+1)\, dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + x\right]_0^2 = \frac{2}{3} \cdot 8 + 2 = \frac{22}{3}.$$

(b) Die Schraubenlinie ist gegeben durch $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit
$\bar{f}(t) = (r\cos t,\, r\sin t,\, c \cdot t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$.
Offenbar ist $\bar{f}$ stetig differenzierbar in $[0,2\pi]$, folglich ist

$$l(\mathfrak{k}) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\textstyle\sum_{i=0}^3 \left(f_i'(t)\right)^2}\, dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + c^2}\, dt$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2+c^2}\, dt = \sqrt{r^2+c^2} \cdot 2\pi.$$

(c) $\bar{f}(t) = (a\cos^3 t,\, a\sin^3 t) = (f_1(t), f_2(t))$ ist in $[0, \frac{\pi}{2}]$ stetig differenzierbar, also

$$l(\mathfrak{k}) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2(t)}\, dt.$$

Es ist

$$\begin{aligned} f_1'^2(t) + f_2'^2(t) &= \Big(3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)\Big)^2 + \Big(3a\sin^2 t\cos t\Big)^2 \\ &= 9a^2\cos^2 t\sin^2 t\cdot(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 9a^2\cos^2 t\sin^2 t. \end{aligned}$$

Folglich ist $\sqrt{f_1'^2(t) + f_2'^2} = 3a\cos t\sin t$ und somit

$$l(\mathfrak{k}) = 3a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\, dt = 3a\Big[\tfrac{1}{2}\sin^2 t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}.$$