

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.10 Integralrechnung (n Veränderliche)

10.1 Beweisen Sie den Satz 10.1:

12/10/1/1

Es sei D ein Rechteckbereich, f in D definiert und beschränkt und $\bar{\mathfrak{z}}, \bar{\mathfrak{z}}', \bar{\mathfrak{z}}_1, \bar{\mathfrak{z}}_2$ seien beliebige Zerlegungen von D . Dann gilt:

- (1) $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.
- (2) $D \cdot \inf_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$ und $\bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq D \cdot \sup_{\bar{x} \in D} f(\bar{x})$.
- (3) Ist $\bar{\mathfrak{z}}'$ eine Verfeinerung von $\bar{\mathfrak{z}}$, dann gilt: $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}})$.
- (4) Es ist stets $\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_1) \leq \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_2)$.

Lösung zu Aufgabe 10.1 Sei $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$, $c = c_0 < c_1 < \dots < c_{m+1} = d$, $D = [a, b] \times [c, d]$, $D_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$ und $\bar{\mathfrak{z}} = \{D_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$ eine Zerlegung von D . 12/10/1/3

- (1) Wegen $a_i < a_{i+1}$, $c_j < c_{j+1}$ und $\inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) \leq \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x})$ gilt stets:

$$\begin{aligned} \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) \\ &\leq \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) \\ &= \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}). \end{aligned}$$

- (2) Für $i = 0, \dots, n$ und $j = 0, \dots, m$ ist offenbar $D_{ij} \subseteq D$ und damit auch

$$\inf_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \leq \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) \quad \text{und} \quad \sup_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \geq \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}).$$

Folglich ist (entsprechend der Bemerkung in 1/1/0):

$$\begin{aligned} D \cdot \inf_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) &= (b - a) \cdot (d - c) \cdot \inf_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \right) \cdot \inf_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \\ &\leq \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) \\ &= \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \quad (\text{nach (1)}) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \right) \cdot \sup_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \\ &= (b - a)(d - c) \cdot \sup_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \\ &= D \cdot \sup_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}). \end{aligned}$$

- (3) Seien $(a_0^i, \dots, a_{n_i+1}^i)$, $(c_0^j, \dots, c_{m_j+1}^j)$ die entsprechenden Zerlegungen von $[a_i, a_{i+1}]$, $[c_j, c_{j+1}]$, die durch die Verfeinerung $\bar{\mathfrak{z}}'$ von $\bar{\mathfrak{z}}$ erzeugt wird, und es sei $D_{ij}^{kl} = [a_i^k, a_{i+1}^k] \times [c_j^l, c_{j+1}^l]$.

Analog wie im Beweis von (2) erhält man

$$(a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \inf_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) \leq \sum_{k=0}^{n_i} \sum_{l=0}^{m_j} D_{ij}^{kl} \cdot \inf_{\bar{x} \in D_{ij}^{kl}} f(\bar{x}) \quad (\star)$$

und

$$(a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \sup_{\bar{x} \in D_{ij}} f(\bar{x}) \geq \sum_{k=0}^{n_i} \sum_{l=0}^{m_j} D_{ij}^{kl} \cdot \sup_{\bar{x} \in D_{ij}^{kl}} f(\bar{x}). \quad (\star\star)$$

Addiert man die Ungleichungen (\star) und $(\star\star)$ bezüglich i, j , dann entsteht die gewünschte Behauptung.

- (4) Es sei $\bar{\mathfrak{z}}'$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\bar{\mathfrak{z}}_1$ und $\bar{\mathfrak{z}}_2$, d.h., alle Teilrechtecke von $\bar{\mathfrak{z}}_1$ und von $\bar{\mathfrak{z}}_2$ sind auch Teilrechtecke von $\bar{\mathfrak{z}}'$. Dann gilt aufgrund der vorhergehenden Beweisschritte offenbar

$$\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_1) \leq \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_2).$$