Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.10 Integralrechnung (n Veränderliche)

10.1 Beweisen Sie den Satz 10.1: **12/10/1/1**

Es sei D ein Rechteckbereich, f in D definiert und beschränkt und $\overline{\mathfrak{z}}, \overline{\mathfrak{z}}', \overline{\mathfrak{z}}_1, \overline{\mathfrak{z}}_2$ seien beliebige Zerlegungen von D. Dann gilt:

(1) $\underline{S}_f(\overline{\mathfrak{z}}) \leq \overline{S}_f(\overline{\mathfrak{z}})$.

(2) $D \cdot \inf\limits_{\overline{x} \in D} f(\overline{x}) \leq \underline{S}_f(\overline{\mathfrak{z}})$ und $\overline{S}_f(\overline{\mathfrak{z}}) \leq D \cdot \sup\limits_{\overline{x} \in D} f(\overline{x})$.

(3) Ist $\overline{\mathfrak{z}}'$ eine Verfeinerung von $\overline{\mathfrak{z}}$, dann gilt: $\underline{S}_f(\overline{\mathfrak{z}}) \leq \underline{S}_f(\overline{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\overline{\mathfrak{z}}') \leq \overline{S}_f(\overline{\mathfrak{z}})$.

(4) Es ist stets $\underline{S}_f(\overline{\mathfrak{z}}_1) \leq \overline{S}_f(\overline{\mathfrak{z}}_2)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 10.1 Man bilde „Rechteckzerlegungen“ von D und führe den Beweis analog wie für Funktionen mit einer Veränderlichen (9/2/7). **12/10/1/2**

Lösung zu Aufgabe 10.1 Sei $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1} = b,\ c = c_0 < c_1 < \cdots < c_{m+1} = d,\ D = [a,b] \times [c,d]$, **12/10/1/3**
$D_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$ und $\overline{\mathfrak{z}} = \{D_{ij} : 0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq m\}$ eine Zerlegung von D.

(1) Wegen $a_i < a_{i+1},\ c_j < c_{j+1}$ und $\inf\limits_{\overline{x} \in D_{ij}} f(\overline{x}) \leq \sup\limits_{\overline{x} \in D_{ij}} f(\overline{x})$ gilt stets:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_f(\overline{\mathfrak{z}}) &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \inf_{\overline{x} \in D_{ij}} f(\overline{x}) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (a_{i+1} - a_i)(a_{j+1} - a_j) \cdot \sup_{\overline{x} \in D_{ij}} f(\overline{x}) \\
&= \overline{S}_f(\overline{\mathfrak{z}}).
\end{aligned}$$

(2) Für $i = 0, \ldots, n$ und $j = 0, \ldots, m$ ist offenbar $D_{ij} \subseteq D$ und damit auch

$$\inf_{\overline{x} \in D} f(\overline{x}) \leq \inf_{\overline{x} \in D_{ij}} f(\overline{x}) \quad \text{und} \quad \sup_{\overline{x} \in D} f(\overline{x}) \geq \sup_{\overline{x} \in D_{ij}} f(\overline{x}).$$

Folglich ist (entsprechend der Bemerkung in 1/1/0):

$$
\begin{aligned}
D\cdot\inf_{\overline{x}\in D} f(\overline{x}) &= (b-a)\cdot(d-c)\cdot\inf_{\overline{x}\in D} f(\overline{x})\\
&= \Big(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-a_j)\Big)\cdot\inf_{\overline{x}\in D} f(\overline{x})\\
&\le \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)\cdot\inf_{\overline{x}\in D_{ij}} f(\overline{x})\\
&= \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \le \overline{S}_f(\mathfrak{z}) \qquad\qquad (\text{nach } (1))\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)\cdot\sup_{\overline{x}\in D_{ij}} f(\overline{x})\\
&= \Big(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)\Big)\cdot\sup_{\overline{x}\in D} f(\overline{x})\\
&= (b-a)(d-c)\cdot\sup_{\overline{x}\in D} f(\overline{x})\\
&= D\cdot\sup_{\overline{x}\in D} f(\overline{x}).
\end{aligned}
$$

(3) Seien $(a_0^i,\dots,a_{n_i+1}^i)$, $(c_0^j,\dots,c_{m_j+1}^j)$ die entsprechenden Zerlegungen von $[a_i,a_{i+1}]$, $[c_j,c_{j+1}]$, die durch die Verfeinerung $\mathfrak{z}'$ von $\mathfrak{z}$ erzeugt wird, und es sei $D_{ij}^{kl}=[a_i^k,a_{i+1}^k]\times[c_j^l,c_{j+1}^l]$.
Analog wie im Beweis von (2) erhält man

$$(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)\cdot\inf_{\overline{x}\in D_{ij}} f(\overline{x}) \le \sum_{k=0}^{n_i}\sum_{l=0}^{m_j} D_{ij}^{kl}\cdot\inf_{\overline{x}\in D_{ij}^{kl}} f(\overline{x}) \quad (\star)$$

und

$$(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)\cdot\sup_{\overline{x}\in D_{ij}} f(\overline{x}) \ge \sum_{k=0}^{n_i}\sum_{l=0}^{m_j} D_{ij}^{kl}\cdot\sup_{\overline{x}\in D_{ij}^{kl}} f(\overline{x}). \quad (\star\star)$$

Addiert man die Ungleichungen $(\star)$ und $(\star\star)$ bezüglich i,j, dann entsteht die gewünschte Behauptung.

(4) Es sei $\mathfrak{z}'$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$, d.h., alle Teilrechtecke von $\mathfrak{z}_1$ und von $\mathfrak{z}_2$ sind auch Teilrechtecke von von $\mathfrak{z}'$. Dann gilt aufgrund der vorhergehenden Beweisschritte offenbar

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) \le \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \le \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \le \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2).$$