

## Kapitel 12 Aufgabensammlung

### 12.10 Integralrechnung ( $n$ Veränderliche)

**10.2** Beweisen Sie das Riemannsches Integrierbarkeitskriterium (für Doppel- und Dreifach- 12/10/2/1  
integrale):

Sei  $D$  ein Rechteckbereich bzw. ein Quader und  $f$  in  $D$  definiert und beschränkt.

Dann gilt:  $f$  ist in  $D$  integrierbar  $\iff$

für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Zerlegung  $\bar{\mathfrak{z}}$  von  $D$ , so daß  $\bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) - \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) < \varepsilon$ .

**Lösung zu Aufgabe 10.2** Wir zeigen die Behauptung für Doppelintegrale; für Drei- 12/10/2/3  
fachintegrale erfolgt der Beweis völlig analog; man benutzt jedoch den entsprechenden  
Satz 10.6 (10/2/3), der analog wie Satz 10.1 leicht zu beweisen ist.

( $\longrightarrow$ ) Sei  $f$  in  $D$  integrierbar, also  $\iint_D f(\bar{x}) d\bar{x} = \iint_D f(\bar{x}) d\bar{x}$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Definition des Unterintegrals (als obere Grenze der Menge aller Untersummen) existiert offenbar eine Zerlegung  $\bar{\mathfrak{z}}_1$  von  $D$ , so daß

$$0 \leq \iint_D f(\bar{x}) d\bar{x} - \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analog gibt es eine Zerlegung  $\bar{\mathfrak{z}}_2$  von  $D$ , so daß

$$0 \leq \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}_2) - \iint_D f(\bar{x}) d\bar{x} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für die gemeinsame Verfeinerung  $\bar{\mathfrak{z}}$  von  $\bar{\mathfrak{z}}_1$  und  $\bar{\mathfrak{z}}_2$  gilt dann (nach Aufgabe 10.1) erst recht

$$0 \leq \iint_D f(\bar{x}) d\bar{x} - \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad 0 \leq \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) - \iint_D f(\bar{x}) d\bar{x} < \frac{\varepsilon}{2}$$

und somit

$$0 \leq \iint_D f(\bar{x}) d\bar{x} - \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) + \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) - \iint_D f(\bar{x}) d\bar{x} < \varepsilon.$$

Folglich ist

$$0 \leq \bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) - \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) < \varepsilon.$$

( $\longleftarrow$ ) Angenommen,  $f$  ist in  $D$  nicht integrierbar. Dann gilt:

$$0 < \iint_D f(\bar{x}) d\bar{x} - \iint_D f(\bar{x}) d\bar{x} := \varepsilon.$$

Nach Voraussetzung existiert für dieses  $\varepsilon$  eine Zerlegung  $\bar{\mathfrak{z}}$  von  $D$ , so daß

$$\bar{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) - \underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) < \varepsilon.$$

Folglich ist

$$\varepsilon = \iint_D \overline{f(\bar{x})} d\bar{x} - \iint_{\underline{D}} f(\bar{x}) d\bar{x} \leq \overline{S}_f(\bar{\delta}) - \underline{S}_f(\bar{\delta}) < \varepsilon. \quad \blacktriangledown!$$