Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.10 Integralrechnung (n Veränderliche)

10.3 Es sei D ein Rechteck bzw. ein Quader und $f : D \to \mathbb{R}$ sei in D beschränkt. Zeigen Sie: **12/10/3/1**

(a) Ist f in D stetig, dann ist f in D integrierbar.

(b) Besitzt f in D höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen, dann ist f in D integrierbar.

Lösungshinweis zu Aufgabe 10.3 (a) Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Riemannschen Integrierbarkeitskriteriums **12/10/3/2**
(vgl. 10/1/10).

(b) Der Beweis erfolgt induktiv über die Anzahl der Unstetigkeitsstellen. Der Fall, bei dem genau eine Unstetigkeit auftritt, wird analog wie für Funktionen einer Veränderlichen bewiesen (vgl. 9/4/3).

Lösung zu Aufgabe 10.3 **12/10/3/3**

(a) Wir benutzen das Riemannsche Integrierbarkeitskriterium (vgl. Aufgabe 10.1). Sei D ein Rechteckbereich (für Quader erfolgt der Beweis völlig analog). Offenbar ist die Menge D beschränkt und abgeschlossen. Nach Satz 6.17 (6/3/30) ist f in D gleichmäßig stetig.
Sei $\varepsilon > 0$. Wir suchen eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ von D, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$. Sei d der Flächeninhalt von D ($d = (b-a)(d-c)$) und $\varepsilon' > 0$ beliebig, jedoch so gewählt, daß $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{d}$. Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f in D existiert für $\varepsilon' > 0$ ein $\delta' > 0$, so daß für jedes $\overline{x}, \overline{y} \in D$ mit $|\overline{x} - \overline{y}| < \delta'$ gilt: $|f(\overline{x}) - f(\overline{y})| < \varepsilon'$.
Sei $\mathfrak{z} = \{D_{ij} : 0 \le i \le n,\, 0 \le j \le m\}$ eine Zerlegung von D (vgl. 10/1/0), so daß $d(\mathfrak{z}) := \max\{\text{Diagonale von } D_{ij} : 0 \le i \le n,\, 0 \le j \le m\} < \delta'$. Dann gilt (falls D_{ij} bzw. D als Flächeninhalt der entsprechenden Rechtecke aufgefaßt wird; vgl. Bemerkung in 10/1/0):

$$\begin{aligned}
\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} D_{ij}\cdot\Big(\underbrace{\sup_{\overline{x}\in D_{ij}} f(\overline{x}) - \inf_{\overline{x}\in D_{ij}} f(\overline{x})}_{\le\varepsilon',\ \text{wegen } |\overline{x}-\overline{y}|<\delta'}\Big) \\
&\le \Big(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} D_{ij}\Big)\cdot\varepsilon' \\
&= D\cdot\varepsilon' = d\cdot\varepsilon' < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ist D ein Quader, dann sind im Beweis „Flächeninhalt von D bzw. von D_{ij}“ durch „Volumen von D bzw. von D_{ijk}“ zu ersetzen, und anstatt Doppelsummen entstehen Dreifachsummen.

(b) Wir führen den Beweis induktiv über die Anzahl k der Unstetigkeitsstellen.

Für $k = 0$ ist f in D stetig und somit nach (a) integrierbar.
Mit Hilfe des Riemann-Kriteriums beweisen wir zunächst den folgenden Hilfssatz:
Ist f in D definiert und beschränkt und besitzt f in D genau eine Unstetigkeitsstelle, dann ist f in D integrierbar.
(Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 9.11 (9/4/2)).
Es sei D ein Rechteck (für den Fall, daß D ein Quader ist verläuft der Beweis analog).
Sei $D = [a, b] \times [c, d]$ und $(\alpha, \beta) \in D$ die Unstetigkeitsstelle von f. Nach Voraussetzung ist f in D beschränkt, folglich gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|f(\overline{x})| < C$ für alle $\overline{x} \in D$. Sei $\varepsilon > 0$, $a \leq \alpha' < \alpha < b' \leq b$ und $b' - a'$ so klein gewählt, daß $b' - a' < \frac{\varepsilon}{6 \cdot (d-c) \cdot C}$; dann ist $(b' - a') \cdot (d - c) \cdot 2C < \frac{\varepsilon}{3}$.
Die Rechtecke $D_1 := [a, a'] \times [c, d]$ und $D_2 := [b', b] \times [c, d]$ enthalten keine Unstetigkeitsstellen von f (falls $\alpha = a$ bzw. $\alpha = b$, dann entfällt D_1 bzw D_2), folglich ist f in D_1 und in D_2 integrierbar. Nach dem Riemann-Kriterium existieren Zerlegungen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ von D_1 bzw. D_2, so daß

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}_1) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_2) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ unterteilen insbesondere das Intervall $[c, d]$ in Teilintervalle. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ die gleichen Unterteilungspunkte in $[c, d]$ enthalten, anderenfalls wählen wir die gemeinsame Verfeinerung. Die Unterteilungspunkte seien gegeben durch $c = c_0 < c_1 < \cdots < c_{m+1} = d$. Die durch $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ definierten Zerlegungspunkte $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_l = a'$, $b' = a_{l+1} < \cdots < a_{n+1} = b$ lassen sich zu einer Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ zusammenfügen; es sei

$$D_{ij} := [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}] \quad \text{und} \quad \mathfrak{z} := \{D_{ij} : 0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq m\}.$$

Folglich gilt für $D' := [a', b'] \times [c, d]$:

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \overline{S}_f(\mathfrak{z}_1) - \underline{S}(\mathfrak{z}_1) + \underbrace{(b' - a')}_{(a_{l+1} - a_l)} \cdot \underbrace{(d - c)}_{\sum_{j=0}^{m}(c_{j+1} - c_j)} \cdot \underbrace{\Big(\sup_{\overline{x} \in D'} f(\overline{x}) - \inf_{\overline{x} \in D'} f(\overline{x}) \Big)}_{\leq 2C} \\ &\qquad + \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_2) \\ &= \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}). \end{aligned}$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen, der natürlich auch völlig analog gilt, wenn anstatt $a' < \alpha < b'$ im Intervall $[a, b]$ der Fall $c' < \beta < d'$ in $[c, d]$ betrachtet wird.

Es sei jetzt $k \geq 1$ und für k gelte die Behauptung bereits; wir beweisen sie für $k + 1$.
Offenbar läßt sich D (als Rechteckbereich bzw. als Quader) so in zwei Teile D_1 und D_2 (Teilrechtecke bzw. Teilquader) zerlegen, daß D_1 und D_2 jeweils höchstens k Unstetigkeitsstellen enthält. Nach Induktionsvoraussetzung ist f dann in D_1 und D_2 integrierbar. Folglich gibt es nach dem Riemann-Kriterium Zerlegungen $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ von D_1 bzw. D_2, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}_i) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $i = 1, 2$. Mittels der im Hilfssatz benutzten Methode erhält man aus $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ von D, für die $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$ gilt.