Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.10 Integralrechnung (n Veränderliche)

10.4 Es sei $[a, b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig in $[a, b]$, **12/10/4/1**
und es gelte $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Weiterhin sei
$B := \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ (x-einfacher Bereich).
Zeigen Sie: B ist kompakt.

Lösung zu Aufgabe 10.4 Wir beweisen zunächst die Beschränktheit von B. **12/10/4/3**
Nach Voraussetzung sind φ und ψ in $[a, b]$ stetig. Folglich besitzt insbesondere ψ ein Maximum M und φ ein Minimum m in $[a, b]$. Für alle $(x, y) \in B$ gilt somit:

$$a \leq x \leq b \quad \text{und} \quad m \leq y \leq M.$$

Folglich ist B beschränkt.

Es bleibt die Abgeschlossenheit von B nachzuweisen. Dazu sei (α, β) ein Häufungspunkt von B. Es genügt zu zeigen, daß $(\alpha, \beta) \in B$.

Es sei (x_n, y_n) eine Folge in B mit $(x_n, y_n) \to (\alpha, \beta)$, also auch $x_n \to \alpha$, $y_n \to \beta$ und $a \leq x_n \leq b$, $\varphi(x_n) \leq y_n \leq \psi(x_n)$. Offenbar ist $a \leq \alpha \leq b$; es genügt zu zeigen: $\varphi(\alpha) \leq \beta \leq \psi(\alpha)$.

Angenommen, $\beta < \varphi(\alpha)$ oder $\psi(\alpha) < \beta$.

Wir führen $\beta < \varphi(\alpha)$ zum Widerspruch; der Fall $\psi(\alpha) < \beta$ wird analog behandelt.

Sei $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon < \varphi(\alpha) - \beta$. Da φ stetig ist in $[a, b]$, ist auch $\varphi(x) - \beta - \varepsilon$ dort stetig und $\varphi(\alpha) - \beta - \varepsilon > 0$. Folglich existiert eine Umgebung $U_\delta(\alpha)$, so daß $\varphi(x) - \beta - \varepsilon > 0$ für alle $x \in U_\delta(\alpha)$ (vgl. 6/3/11), also $\varphi(x) > \beta + \varepsilon$. Insbesondere ist $y_n \geq \varphi(x_n) > \beta + \varepsilon$ für alle Folgeglieder (x_n, y_n). Die Umgebung $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \times (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ enthält also kein Folgeglied und somit ist (α, β) kein Häufungspunkt von B. ↯!