

## Kapitel 12

### Aufgabensammlung

#### 12.10 Integralrechnung ( $n$ Veränderliche)

**10.4** Es sei  $[a, b]$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig in  $[a, b]$ ,  
 und es gelte  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ . Weiterhin sei  
 $B := \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  ( $x$ -einfacher Bereich).  
 Zeigen Sie:  $B$  ist kompakt. 12/10/4/1

**Lösungshinweis zu Aufgabe 10.4** Die Beschränktheit ist sehr einfach nachzuweisen. 12/10/4/2  
 Für die Abgeschlossenheit zeigt man, daß jeder Häufungspunkt  $(\alpha, \beta)$  von  $B$  zu  $B$   
 gehört. Hierbei wird benutzt, daß es zu  $(\alpha, \beta)$  eine Folge  $(x_n, y_n)$  in  $B$  gibt mit  
 $(x_n, y_n) \rightarrow (\alpha, \beta)$ .

**Lösung zu Aufgabe 10.4** Wir beweisen zunächst die Beschränktheit von  $B$ . 12/10/4/3  
 Nach Voraussetzung sind  $\varphi$  und  $\psi$  in  $[a, b]$  stetig. Folglich besitzt insbesondere  $\psi$  ein  
 Maximum  $M$  und  $\varphi$  ein Minimum  $m$  in  $[a, b]$ . Für alle  $(x, y) \in B$  gilt somit:

$$a \leq x \leq b \quad \text{und} \quad m \leq y \leq M.$$

Folglich ist  $B$  beschränkt.

Es bleibt die Abgeschlossenheit von  $B$  nachzuweisen. Dazu sei  $(\alpha, \beta)$  ein Häufungs-  
 punkt von  $B$ . Es genügt zu zeigen, daß  $(\alpha, \beta) \in B$ .

Es sei  $(x_n, y_n)$  eine Folge in  $B$  mit  $(x_n, y_n) \rightarrow (\alpha, \beta)$ , also auch  $x_n \rightarrow \alpha$ ,  $y_n \rightarrow \beta$   
 und  $a \leq x_n \leq b$ ,  $\varphi(x_n) \leq y_n \leq \psi(x_n)$ . Offenbar ist  $a \leq \alpha \leq b$ ; es genügt zu zeigen:  
 $\varphi(\alpha) \leq \beta \leq \psi(\alpha)$ .

Angenommen,  $\beta < \varphi(\alpha)$  oder  $\psi(\alpha) < \beta$ .

Wir führen  $\beta < \varphi(\alpha)$  zum Widerspruch; der Fall  $\psi(\alpha) < \beta$  wird analog behandelt.

Sei  $\varepsilon > 0$  und  $\varepsilon < \varphi(\alpha) - \beta$ . Da  $\varphi$  stetig ist in  $[a, b]$ , ist auch  $\varphi(x) - \beta - \varepsilon$  dort stetig  
 und  $\varphi(\alpha) - \beta - \varepsilon > 0$ . Folglich existiert eine Umgebung  $U_\delta(\alpha)$ , so daß  $\varphi(x) - \beta - \varepsilon > 0$   
 für alle  $x \in U_\delta(\alpha)$  (vgl. 6/3/11), also  $\varphi(x) > \beta + \varepsilon$ . Insbesondere ist  $y_n \geq \varphi(x_n) > \beta + \varepsilon$   
 für alle Folgenglieder  $(x_n, y_n)$ . Die Umgebung  $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \times (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$  enthält also  
 kein Folgenglied und somit ist  $(\alpha, \beta)$  kein Häufungspunkt von  $B$ .  $\nexists!$