

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.10 Integralrechnung (n Veränderliche)

10.5 Man beweise Satz 10.7 (10/2/8 – dreifach iterierte Integrale über Quadern):

12/10/5/1

Sei $D = [a, a^*] \times [b, b^*] \times [c, c^*]$ und $f(x, y, z)$ in D integrierbar. Ist $f(x, y, z)$ für jedes fixierte $x \in [a, a^*]$ (als Funktion von y, z) in $[b, b^*] \times [c, c^*] := D'$ integrierbar und $F(x) := \iint_{D'} f(x, y, z) dydz$ (als Funktion von x) in $[a, a^*]$ integrierbar, dann ist

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^{a^*} \left(\iint_{D'} f(x, y, z) dy dz \right) dx.$$

Lösung zu Aufgabe 10.5 Seien $\mathfrak{z}_1 = (a_0, \dots, a_{n+1})$, $\mathfrak{z}_2 = (b_0, \dots, b_{m+1})$, $\mathfrak{z}_3 = (c_0, \dots, c_{k+1})$ Zerlegungen der Intervalle $[a, a^*]$, $[b, b^*]$ bzw. $[c, c^*]$, $D_{ij\nu} := [a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}] \times [c_\nu, c_{\nu+1}]$, $D_{j\nu} := [b_j, b_{j+1}] \times [c_\nu, c_{\nu+1}]$ und $\mathfrak{z} = \{D_{ij\nu} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m, 0 \leq \nu \leq k\}$. 12/10/5/3

Dann ist mit Hilfe des Satzes 10.1 (10/1/3) leicht nachzuweisen, daß

$$F(x) = \iint_{D'} f(x, y, z) dy dz = \sum_{j=0}^m \sum_{\nu=0}^k \iint_{D'_{j\nu}} f(x, y, z) dy dz.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \int_a^{a^*} F(x) dx &= \int_a^{a^*} \left(\iint_{D'} f(x, y, z) dy dz \right) dx \\ &= \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\iint_{D'} f(x, y, z) dy dz \right) dx \\ &= \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\sum_{j=0}^m \sum_{\nu=0}^k \iint_{D'_{j\nu}} f(x, y, z) dy dz \right) dx. \end{aligned}$$

Für alle $\bar{x} \in D$ und $h_{ij\nu} := \inf_{\bar{x} \in D_{ij\nu}} f(\bar{x})$, $H_{ij\nu} := \sup_{\bar{x} \in D_{ij\nu}} f(\bar{x})$, gilt stets:

$h_{ij\nu} \leq f(\bar{x}) \leq H_{ij\nu}$ und somit nach Satz 10.2 (10/1/11)

$$h_{ij\nu} \cdot D'_{j\nu} \leq \iint_{D'_{j\nu}} f(x, y, z) dy dz \leq H_{ij\nu} \cdot D'_{j\nu}.$$

Folglich ist

$$h_{ij\nu} \cdot \underbrace{D'_{j\nu} \cdot (a_{i+1} - a_i)}_{D_{ij\nu}} \leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\iint_{D'_{j\nu}} f(x, y, z) dy dz \right) dx \leq H_{ij\nu} \cdot \underbrace{D'_{j\nu} \cdot (a_{i+1} - a_i)}_{D_{ij\nu}}.$$

Summiert man die Ungleichungen nach i, j, ν , so erhält man

$$\begin{aligned}
\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{\nu=0}^k h_{ij\nu} \cdot D_{ij\nu} \\
&\leq \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{\nu=0}^k \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\iint_{D'_{j\nu}} f(x, y, z) dydz \right) dx \\
&= \int_a^{a^*} \left(\iint_{D'} f(x, y, z) dydz \right) dx \\
&\leq \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{\nu=0}^k H_{ij\nu} \cdot D_{ij\nu} \\
&= \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}).
\end{aligned}$$

Da f in D integrierbar ist, unterscheiden sich nach dem Riemann-Kriterium Ober- und Untersumme von f bei geeigneten Zerlegungen um beliebig wenig. Nach Definition des Integrals gilt stets:

$$\underline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}) \leq \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \leq \overline{S}_f(\bar{\mathfrak{z}}).$$

Folglich ist

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^{a^*} \left(\iint_{D'} f(x, y, z) dy dz \right) dx.$$