Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.10 Integralrechnung (n Veränderliche)

10.5 Man beweise Satz 10.7 (10/2/8 – dreifach iterierte Integrale über Quadern): **12/10/5/1**
Sei $D = [a, a^*] \times [b, b^*] \times [c, c^*]$ und $f(x, y, z)$ in D integrierbar. Ist $f(x, y, z)$ für jedes fixierte $x \in [a, a^*]$ (als Funktion von y, z) in $[b, b^*] \times [c, c^*] := D'$ integrierbar und $F(x) := \iint\limits_{D'} f(x, y, z)\, dydz$ (als Funktion von x) in $[a, a^*]$ integrierbar, dann ist

$$\iiint\limits_{D} f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_{a}^{a^*} \Big(\iint\limits_{D'} f(x, y, z)\, dydz \Big) dx.$$

Lösungshinweis zu Aufgabe 10.5 Der Beweis erfolgt analog wie der zu Satz 10.4 (10/1/22). **12/10/5/2**

Lösung zu Aufgabe 10.5 Seien $\mathfrak{z}_1 = (a_0, \ldots, a_{n+1})$, $\mathfrak{z}_2 = (b_0, \ldots, b_{m+1})$, $\mathfrak{z}_3 = (c_0, \ldots, c_{k+1})$ Zerlegungen der Intervalle $[a, a^*]$, $[b, b^*]$ bzw. $[c, c^*]$, $D_{ij\nu} := [a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}] \times [c_\nu, c_{\nu+1}]$, $D_{j\nu} := [b_j, b_{j+1}] \times [c_\nu, c_{\nu+1}]$ und $\bar{\mathfrak{z}} = \{D_{ij\nu} : 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le m,\ 0 \le \nu \le k\}$. **12/10/5/3**

Dann ist mit Hilfe des Satzes 10.1 (10/1/3) leicht nachzuweisen, daß

$$F(x) = \iint\limits_{D'} f(x, y, z)\, dydz = \sum_{j=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{k} \iint\limits_{D'_{ij}} f(x, y, z)\, dydz.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{a}^{a^*} F(x)\, dx &= \int\limits_{a}^{a^*} \Big(\iint\limits_{D'} f(x, y, z)\, dydz \Big) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} \Big(\iint\limits_{D'} f(x, y, z)\, dydz \Big) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} \Big(\sum_{j=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{k} \iint\limits_{D'_{j\nu}} f(x, y, z)\, dydz \Big) dx. \end{aligned}$$

Für alle $\overline{x} \in D$ und $h_{ij\nu} := \inf\limits_{\overline{x} \in D_{ij\nu}} f(\overline{x})$, $H_{ij\nu} := \sup\limits_{\overline{x} \in D_{ij\nu}} f(\overline{x})$, gilt stets:
$h_{ij\nu} \le f(\overline{x}) \le H_{ij\nu}$ und somit nach Satz 10.2 (10/1/11)

$$h_{ij\nu} \cdot D'_{j\nu} \le \iint\limits_{D'_{j\nu}} f(x, y, z)\, dydz \le H_{ij\nu} \cdot D'_{j\nu}.$$

Folglich ist

$$h_{ij\nu} \cdot \underbrace{D'_{j\nu} \cdot (a_{i+1} - a_i)}_{D_{ij\nu}} \le \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} \Big(\iint\limits_{D'_{j\nu}} f(x, y, z)\, dydz \Big) dx \le H_{ij\nu} \cdot \underbrace{D'_{j\nu} \cdot (a_{i+1} - a_i)}_{D_{ij\nu}}.$$

Summiert man die Ungleichungen nach i, j, ν, so erhält man

$$\begin{aligned}
\underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{k} h_{ij\nu}\cdot D_{ij\nu} \\
&\leq \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{k} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} \Big(\iint\limits_{D'_{j\nu}} f(x,y,z)\,dydz\Big)dx \\
&= \int\limits_{a}^{a^*} \Big(\iint\limits_{D'} f(x,y,z)\,dydz\Big)dx \\
&\leq \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{k} H_{ij\nu}\cdot D_{ij\nu} \\
&= \overline{S}_f(\mathfrak{z}).
\end{aligned}$$

Da f in D integrierbar ist, unterscheiden sich nach dem Riemann-Kriterium Ober- und Untersumme von f bei geeigneten Zerlegungen um beliebig wenig. Nach Definition des Integrals gilt stets:

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

Folglich ist

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{a}^{a^*} \Big(\iint\limits_{D'} f(x,y,z)\,dydz\Big)dx.$$