Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.10 Integralrechnung (n Veränderliche)

10.6 Sei $D := \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2\}$, und f sei in D durch $f(x,y) = x^y$ definiert. **12/10/6/1**
Man berechne $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$.

Lösung zu Aufgabe 10.6 Für $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2\}$ ist **12/10/6/3**

$$f(x,y) = x^y = \begin{cases} \mathrm{e}^{y \ln x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

In D ist f stetig. Für $(x,y) \in D$ und $x \neq 0$ ist dies offensichtlich. Es sei nun $x = 0,\ 1 \le y \le 2$ und (x_n, y_n) eine gegen $(0,y)$ konvergierende Folge aus D, also $x_n \to 0,\ y_n \to y$. Für die Folgeglieder (x_{m_i}, y_{m_i}) mit $x_{m_i} = 0$ ist $f(x_{m_i}, y_{m_i}) = 0$.
Sei (x_{n_i}, y_{n_i}) die Teilfolge von (x_n, y_n) mit $x_{n_i} \neq 0$. Dann ist

$$f(x_{n_i}, y_{n_i}) = \mathrm{e}^{y_{n_i} \cdot \ln x_{n_i}} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

denn $\ln x_{n_i} \longrightarrow -\infty$ und (y_{n_i}) ist beschränkt. Also

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0 = f(0,y).$$

Damit ist f auch in $(0,y)$ stetig. Die Berechnung des Integrals erfolgt nun mit Hilfe des Korollars zum Satz 10.3 (10/1/16). Es ist

$$\begin{aligned} \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy &= \int_1^2 \Big(\int_0^1 x^y\,dx \Big) dy \\ &= \int_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy = \int_1^2 \frac{1}{y+1}\,dy \\ &= \Big[\ln(y+1) \Big]_1^2 = \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$