

## Kapitel 12

### Aufgabensammlung

#### 12.10 Integralrechnung ( $n$ Veränderliche)

**10.7** Es sei  $B := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$  und  $f$  sei in  $B$  durch  $f(x, y) = x^2 + 7y^2$  definiert. Berechnen Sie  $\iint_B f(x, y) \, dx dy$ . 12/10/7/1

**Lösung zu Aufgabe 10.7** Für  $\varphi(x) := 0$ ,  $\psi(x) := x^2$  sind  $\varphi$  und  $\psi$  stetig in  $[0, 1]$ . 12/10/7/3  
Folglich bildet die Menge  $B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  einen  $x$ -einfachen Bereich. Da  $f$  in  $B$  stetig ist, läßt sich das Integral  $\iint_B f(x, y) \, dx dy$  mit Hilfe des Satzes 10.5 (1) (10/1/26) berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} \iint_B f(x, y) \, dx dy &= \int_0^1 \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} (x^2 + 7y^2) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[ x^2 y + \frac{7}{3} y^3 \right]_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left( x^4 + \frac{7}{3} x^6 \right) dx \\ &= \left[ \frac{x^5}{5} + \frac{1}{3} x^7 \right]_0^1 = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$