

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.10 Integralrechnung (n Veränderliche)

10.7 Es sei $B := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ und f sei in B durch $f(x, y) = x^2 + 7y^2$ definiert. Berechnen Sie $\iint_B f(x, y) \, dx dy$. 12/10/7/1

Lösungshinweis zu Aufgabe 10.7 $\iint_B f(x, y) \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx = \frac{8}{15}$. 12/10/7/2

Lösung zu Aufgabe 10.7 Für $\varphi(x) := 0$, $\psi(x) := x^2$ sind φ und ψ stetig in $[0, 1]$. Folglich bildet die Menge $B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ einen x -einfachen Bereich. Da f in B stetig ist, läßt sich das Integral $\iint_B f(x, y) \, dx dy$ mit Hilfe des Satzes 10.5 (1) (10/1/26) berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} \iint_B f(x, y) \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + 7y^2) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{7}{3} y^3 \right]_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{7}{3} x^6 \right) dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{1}{3} x^7 \right]_0^1 = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$