Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.10 Integralrechnung (n Veränderliche)

10.8 Berechnen Sie mit Hilfe des Integrals das Volumen der Punktmenge **12/10/8/1**

$$B = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1 \ \text{ und } \ 0 \le z \le f(x,y)\},$$

wobei $f(x,y) := 2 + \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$ (schrägabgeschnittener Zylinder).

Lösung zu Aufgabe 10.8 Die Grundfläche G des Zylinders ist gegeben durch $x^2 + y^2 \le 1$, d.h., G ist ein Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt $(0,0)$. Sei $\varphi(x) := -\sqrt{1-x^2}$ und $\psi(x) := \sqrt{1-x^2}$. Dann ist $G = \{(x,y) : -1 \le x \le 1,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ ein x-einfacher Bereich, in dem $f(x,y) = 2 + \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$ definiert und stetig ist. Folglich gilt nach Satz 10.5 (1) (10/1/26): **12/10/8/3**

$$\begin{aligned}
\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy &= \int_{-1}^{1} \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (2 + \tfrac{x}{2} + \tfrac{y}{3})\,dy \Big)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \Big[(2+\tfrac{x}{2})y + \frac{y^2}{6} \Big]_{-\psi(x)}^{\psi(x)} dx \quad (\text{wegen } \ \varphi(x) = -\psi(x)\,) \\
&= \int_{-1}^{1} \Big[2(2+\tfrac{x}{2})\cdot\psi(x) + \frac{\psi^2(x)}{6} - \frac{\psi^2(x)}{6} \Big]\,dx \\
&= 4\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} x\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx.
\end{aligned}$$

Es ist $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (vgl. Beispiele: 9/6/1/4). Weiterhin ist

$$\int x\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = -\tfrac{1}{3}\sqrt{1-x^2}^{\,3} \qquad (t := 1-x^2)$$

und somit $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx = 0$. Damit ist das Volumen der Punktmenge B gegeben durch $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = 2\pi$.