# Kapitel 12
# Aufgabensammlung

## 12.10 Integralrechnung ($n$ Veränderliche)

**10.8** Berechnen Sie mit Hilfe des Integrals das Volumen der Punktmenge **12/10/8/1**

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1 \ \text{ und } \ 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

wobei $f(x, y) := 2 + \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$ (schrägabgeschnittener Zylinder).

**Lösungshinweis zu Aufgabe 10.8** Es sei $G = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ mit $\varphi(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ und $\psi(x) = \sqrt{1 - x^2}$. **12/10/8/2**

Das Volumen beträgt $\iint\limits_G f(x, y)\, dxdy = \int\limits_{-1}^{1} \Big( \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (2 + \frac{x}{2} + \frac{y}{3})\, dy \Big)\, dx = 2\pi.$

**Lösung zu Aufgabe 10.8** Die Grundfläche $G$ des Zylinders ist gegeben durch $x^2 + y^2 \leq 1$, d.h., $G$ ist ein Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt $(0, 0)$. Sei $\varphi(x) := -\sqrt{1 - x^2}$ und $\psi(x) := \sqrt{1 - x^2}$. Dann ist $G = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ ein $x$-einfacher Bereich, in dem $f(x, y) = 2 + \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$ definiert und stetig ist. Folglich gilt nach Satz 10.5 (1) (10/1/26): **12/10/8/3**

$$\begin{aligned}
\iint\limits_G f(x, y)\, dxdy &= \int\limits_{-1}^{1} \Big( \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (2 + \tfrac{x}{2} + \tfrac{y}{3})\, dy \Big)\, dx \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \Big[ (2 + \tfrac{x}{2}) y + \frac{y^2}{6} \Big]_{-\psi(x)}^{\psi(x)}\, dx \quad (\text{wegen } \ \varphi(x) = -\psi(x)\,) \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \Big[ 2(2 + \tfrac{x}{2}) \cdot \psi(x) + \frac{\psi^2(x)}{6} - \frac{\psi^2(x)}{6} \Big]\, dx \\
&= 4 \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx + \int\limits_{-1}^{1} x \cdot \sqrt{1 - x^2}\, dx.
\end{aligned}$$

Es ist $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$ (vgl. Beispiele: 9/6/1/4). Weiterhin ist

$$\int x \cdot \sqrt{1 - x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \int \sqrt{t}\, dt = -\frac{1}{3} \sqrt{1 - x^2}^{\,3} \qquad (t := 1 - x^2)$$

und somit $\int\limits_{-1}^{1} x\sqrt{1 - x^2}\, dx = 0$. Damit ist das Volumen der Punktmenge $B$ gegeben durch $\iint\limits_G f(x, y)\, dxdy = 2\pi$.