Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.10 Integralrechnung (n Veränderliche)

10.9 In dem Intervall $[0,1]$ seien die Funktionen φ, ψ durch $\varphi(x) := x^2$ und $\psi(x) := \sqrt[4]{x}$ definiert. B sei der durch $B := \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ gegebene x-einfache Bereich. Weiterhin sei $f(x,y) = \sqrt{x} - y^2$. **12/10/9/1**

(a) Berechnen Sie $\iint\limits_B f(x,y)\,dxdy$.

(b) Stellen Sie B als y-einfachen Bereich dar, und berechnen Sie das Integral erneut, jedoch jetzt über dem y-einfachen Bereich B.

Lösung zu Aufgabe 10.9 **12/10/9/3**

(a) Offenbar ist $f(x,y) = \sqrt{x} - y^2$ in B stetig. Folglich gilt nach Satz 10.5 (1) (10/1/26):

$$\begin{aligned}
\iint\limits_B f(x,y)\,dxdy &= \int_0^1 \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (\sqrt{x} - y^2)\,dy \Big)\,dx \\
&= \int_0^1 \Big[\sqrt{x}\cdot y - \frac{y^3}{3} \Big]_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\,dx \\
&= \int_0^1 \Big(\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x} - \tfrac{1}{3}\sqrt[4]{x}^{\,3} - \sqrt{x}\cdot x^2 + \tfrac{x^6}{3} \Big)\,dx \\
&= \int_0^1 \Big(x^{\frac{3}{4}} - \tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{1}{3}x^6 \Big)\,dx \\
&= \Big[\frac{8}{21}x^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{21}x^7 \Big]_0^1 = \frac{1}{7}.
\end{aligned}$$

(b) B läßt sich wie folgt als y-einfacher Bereich B_1 darstellen:

$$B_1 := \{(x,y) : \varphi_1(y) \le x \le \psi_1(y),\ 0 \le y \le 1\},$$

wobei $\varphi_1(y) = y^4$, $\psi_1(y) = \sqrt{y}$. Weiterhin ist $f(x,y)$ in B_1 stetig und somit nach Satz 10.5 (b) (10/1/26):

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{B_1} f(x,y)\,dxdy &= \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x,y)\,dx\Big)\,dy \\
&= \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{y^4}^{\sqrt{y}} (\sqrt{x}-y^2)\,dx\Big)\,dy \\
&= \int\limits_0^1 \Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - y^2 x\Big]_{y^4}^{\sqrt{y}}\,dy \\
&= \int\limits_0^1 \Big(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}y^6 + y^6\Big)\,dy \\
&= \Big[\frac{8}{21}y^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{21}y^7 + \frac{1}{7}y^7\Big]_0^1 = \frac{1}{7}.
\end{aligned}
$$