

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.10 Integralrechnung (n Veränderliche)

10.9 In dem Intervall $[0, 1]$ seien die Funktionen φ, ψ durch $\varphi(x) := x^2$ und $\psi(x) := \sqrt[4]{x}$ definiert. B sei der durch $B := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ gegebene x -einfache Bereich. Weiterhin sei $f(x, y) = \sqrt{x} - y^2$. 12/10/9/1

(a) Berechnen Sie $\iint_B f(x, y) \, dx dy$.

(b) Stellen Sie B als y -einfachen Bereich dar, und berechnen Sie das Integral erneut, jedoch jetzt über dem y -einfachen Bereich B .

Lösungshinweis zu Aufgabe 10.9 (a) $\iint_B f(x, y) \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (\sqrt{x} - y^2) \, dy \right) dx = \frac{1}{7}$. 12/10/9/2

(b) Es ist $B = B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y), 0 \leq y \leq 1\}$ mit $\varphi_1(y) = y^4$ und $\psi_1(y) = \sqrt{y}$ und somit

$$\iint_{B_1} f(x, y) \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y) \, dx \right) dy = \frac{1}{7}.$$

Lösung zu Aufgabe 10.9

12/10/9/3

(a) Offenbar ist $f(x, y) = \sqrt{x} - y^2$ in B stetig. Folglich gilt nach Satz 10.5 (1) (10/1/26):

$$\begin{aligned} \iint_B f(x, y) \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (\sqrt{x} - y^2) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\sqrt{x} \cdot y - \frac{y^3}{3} \right]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx \\ &= \int_0^1 \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} - \frac{1}{3} \sqrt[4]{x}^3 - \sqrt{x} \cdot x^2 + \frac{x^6}{3} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3} x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} x^6 \right) dx \\ &= \left[\frac{8}{21} x^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{21} x^7 \right]_0^1 = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

(b) B läßt sich wie folgt als y -einfacher Bereich B_1 darstellen:

$$B_1 := \{(x, y) : \varphi_1(y) \leq x \leq \psi_1(y), 0 \leq y \leq 1\},$$

wobei $\varphi_1(y) = y^4$, $\psi_1(y) = \sqrt{y}$. Weiterhin ist $f(x, y)$ in B_1 stetig und somit nach Satz 10.5 (b) (10/1/26):

$$\begin{aligned}
\iint_{B_1} f(x, y) \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y) \, dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_{y^4}^{\sqrt{y}} (\sqrt{x} - y^2) \, dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - y^2 x \right]_{y^4}^{\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} y^6 + y^6 \right) dy \\
&= \left[\frac{8}{21} y^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{21} y^7 + \frac{1}{7} y^7 \right]_0^1 = \frac{1}{7}.
\end{aligned}$$