Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.1 Grundbegriffe der Mengenlehre und der Logik 12

1.1 X, Y, Z seien beliebige Mengen. Beweisen Sie: 12/1/1/1
(a) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$,
(b) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$,
(c) $X \cap (X \cup Y) = X$,
(d) $X \cup (X \cap Y) = X$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.1 Der Beweis benutzt nur die Definitionen von Durchschnitt, Vereinigung und Gleichheit von Mengen und die elementaren Eigenschaften der Konnektoren: und, oder, gdw. 12/1/1/2

Lösung zu Aufgabe 1.1 12/1/1/3

(a)
$$\begin{aligned} x \in X \cap (Y \cup Z) &\iff x \in X \text{ und } x \in Y \cup Z \\ &\iff x \in X \text{ und } (x \in Y \text{ oder } x \in Z) \\ &\iff (x \in X \text{ und } x \in Y) \text{ oder } (x \in X \text{ und } x \in Z) \\ &\iff x \in X \cap Y \text{ oder } x \in X \cap Z \\ &\iff x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z). \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x \in X \cup (Y \cap Z) &\iff x \in X \text{ oder } x \in Y \cap Z \\ &\iff x \in X \text{ oder } (x \in Y \text{ und } x \in Z) \\ &\iff (x \in X \text{ oder } x \in Y) \text{ und } (x \in X \text{ oder } x \in Z) \\ &\iff (x \in X \cup Y) \text{ und } (x \in X \cup Z) \\ &\iff x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z). \end{aligned}$$

(c) Offenbar ist $X \cap (X \cup Y) \subseteq X$.
Wegen $X \subseteq X \cup Y$ ist auch $X \subseteq X \cap (X \cup Y)$ und somit $X \cap (X \cup Y) = X$.

(d) Offenbar ist $X \subseteq X \cup (X \cap Y)$.
Wegen $X \cap Y \subseteq X$ ist auch $X \cup (X \cap Y) \subseteq X$ und somit $X \cup (X \cap Y) = X$.

1.2 Es sei M eine Menge. Für $X \subseteq M$ sei stets $\mathrm{C}(X)$ das Komplement von X bez. M. Zeigen Sie, daß für beliebige Teilmengen $X, Y, Z \subseteq M$ gilt: 12/1/2/1
(a) $\mathrm{C}(X \cup Y) = \mathrm{C}(X) \cap \mathrm{C}(Y)$,
(b) $\mathrm{C}(X \cap Y) = \mathrm{C}(X) \cup \mathrm{C}(Y)$,
(c) $\mathrm{C}(X) \setminus Y = \mathrm{C}(X \cup Y)$,
(d) $X \setminus (Y \cup Z) = X \cap \mathrm{C}(Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) = X \cap \mathrm{C}(Y) \cap \mathrm{C}(Z)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.2 Der Beweis benutzt nur die Definitionen von Durchschnitt, Vereinigung, Differenz und Gleichheit von Mengen und die elementaren Eigenschaften der Konnektoren: und, oder, gdw, nicht. 12/1/2/2

Lösung zu Aufgabe 1.2 12/1/2/3

(a)
$$\begin{aligned} x \in \mathrm{C}(X \cup Y) &\iff x \in M \setminus (X \cup Y) \\ &\iff x \in M \ \text{ und } \ x \notin X \cup Y \\ &\iff x \in M \ \text{ und } \ x \notin X \ \text{ und } \ x \notin Y \\ &\iff x \in M \setminus X \ \text{ und } \ x \in M \setminus Y \\ &\iff x \in \mathrm{C}(X) \ \text{ und } \ x \in \mathrm{C}(Y) \\ &\iff x \in \mathrm{C}(X) \cap \mathrm{C}(Y). \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x \in \mathrm{C}(X \cap Y) &\iff x \in M \setminus (X \cap Y) \\ &\iff x \in M \ \text{ und } \ x \notin X \cap Y \\ &\iff x \in M \ \text{ und } \ (x \notin X \ \text{ oder } \ x \notin Y) \\ &\iff x \in M \setminus X \ \text{ oder } \ x \in M \setminus Y \\ &\iff x \in \mathrm{C}(X) \ \text{ oder } \ x \in \mathrm{C}(Y) \\ &\iff x \in \mathrm{C}(X) \cup \mathrm{C}(Y). \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x \in \mathrm{C}(X) \setminus Y &\iff x \in \mathrm{C}(X) \ \text{ und } \ x \notin Y \\ &\iff x \in M \setminus X \ \text{ und } \ x \notin Y \\ &\iff x \in M \ \text{ und } \ x \notin X \ \text{ und } \ x \notin Y \\ &\iff x \in M \ \text{ und } \ x \notin X \cup Y \\ &\iff x \in M \setminus (X \cup Y) \\ &\iff x \in \mathrm{C}(X \cup Y). \end{aligned}$$

(d) Wir zeigen zunächst $X \setminus (Y \cup Z) = X \cap \mathrm{C}(Y \cup Z)$.

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (Y \cup Z) &\iff x \in X \ \text{ und } \ x \notin Y \cup Z \\ &\iff x \in X \ \text{ und } \ x \in \mathrm{C}(Y \cup Z) \\ &\phantom{\iff{}} x \in X \cap \mathrm{C}(Y \cup Z). \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt $X \cap \mathrm{C}(Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$.

$$\begin{aligned} x \in X \cap \mathrm{C}(Y \cup Z) &\iff x \in X \ \text{ und } \ x \in \mathrm{C}(Y \cup Z) \\ &\iff x \in X \ \text{ und } \ x \in M \ \text{ und } \ x \notin Y \cup Z \\ &\iff x \in X \ \text{ und } \ x \notin Y \ \text{ und } \ x \notin Z \\ &\iff x \in X \setminus Y \ \text{ und } \ x \in X \setminus Z \\ &\iff x \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z). \end{aligned}$$

Es bleibt noch $(X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) = X \cap \mathrm{C}(Y) \cap \mathrm{C}(Z)$ zu beweisen.

$$\begin{aligned} x \in (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) &\iff x \in X \ \text{ und } \ x \notin Y \ \text{ und } \ x \notin Z \\ &\iff x \in X \ \text{ und } \ x \in \mathrm{C}(Y) \ \text{ und } \ x \in \mathrm{C}(Z) \\ &\iff x \in X \cap \mathrm{C}(Y) \cap \mathrm{C}(Z). \end{aligned}$$

1.3 Es sei M eine Menge. Für $X \subseteq M$ sei stets $\mathrm{C}(X)$ das Komplement von X **12/1/3/1**
bez. M. Weiterhin sei $S = \{X_i \,:\, i \in I\}$ ein System von Mengen mit $X_i \subseteq M$.
Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{C}\Big(\bigcup\limits_{i \in I} X_i\Big) = \bigcap\limits_{i \in I} \mathrm{C}(X_i)$,

(b) $\mathrm{C}\Big(\bigcap\limits_{i \in I} X_i\Big) = \bigcup\limits_{i \in I} \mathrm{C}(X_i)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.3 Der Beweis benutzt nur die Definitionen von Durchschnitt und Vereinigung beliebig vieler Mengen, das Komplement, die Differenz und die Gleichheit von Mengen, sowie die elementaren Eigenschaften der Konnektoren: und, oder, gdw und der Quantoren: es gibt ein, für jedes. 12/1/3/2

Lösung zu Aufgabe 1.3 Für $\bigcap_{i \in I} X_i$ bzw. $\bigcup_{i \in I} X_i$ schreiben wir im Folgenden einfach $\bigcap X_i$ bzw. $\bigcup X_i$. 12/1/3/3

(a)
$$\begin{aligned} x \in \mathrm{C}(\textstyle\bigcup X_i) &\iff x \in M \setminus \textstyle\bigcup X_i \\ &\iff x \in M \text{ und } x \notin \textstyle\bigcup X_i \\ &\iff x \in M \text{ und } x \notin X_i \text{ für jedes } i \in I \\ &\iff x \in \mathrm{C}(X_i) \text{ für jedes } i \in I \\ &\iff x \in \textstyle\bigcap \mathrm{C}(X_i). \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x \in \mathrm{C}(\textstyle\bigcap X_i) &\iff x \in M \setminus \textstyle\bigcap X_i \\ &\iff x \in M \text{ und } x \notin \textstyle\bigcap X_i \\ &\iff x \in M \text{ und } x \notin X_i \text{ für ein } i \in I \\ &\iff x \in \mathrm{C}(X_i) \text{ für ein } i \in I \\ &\iff x \in \textstyle\bigcup \mathrm{C}(X_i). \end{aligned}$$

1.4 X, Y, Z seien Mengen von reellen Zahlen, so daß 12/1/4/1
$X = \{x : -1 \le x < 1\}$, $Y = \{x : 1 \le x \le 3\}$, $Z = \{x : 2 < x < 4\}$.
Geben Sie die folgenden Mengen an:

(a) $X \cap Y \cap Z$,
(b) $(X \cup Y) \cap Z$,
(c) $X \cup (Y \cap Z)$,
(d) $\mathrm{C}(X \cup Z) \cap Y$,
(e) $(Y \setminus Z) \cup X$,
(f) $Y \setminus (Z \cup X)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.4 Der Beweis benutzt nur die Definitionen von Durchschnitt, Vereinigung, Differenz und Gleichheit von Mengen und die elementaren Eigenschaften der Konnektoren: und, oder, gdw, nicht. 12/1/4/2

Lösung zu Aufgabe 1.4 12/1/4/3

(a)
$$\begin{aligned} x \in X \cap Y \cap Z &\iff -1 \le x < 1 \text{ und } 1 \le x \le 3 \text{ und } 2 < x < 4 \\ &\iff 2 < x \text{ und } x < 1; \end{aligned}$$
also $X \cap Y \cap Z = \emptyset$.

(b)
$$\begin{aligned} x \in (X \cup Y) \cap Z &\iff (x \in X \text{ oder } x \in Y) \text{ und } x \in Z \\ &\iff (-1 \le x < 1 \text{ oder } 1 \le x \le 3) \text{ und } 2 < x < 4 \\ &\iff 2 < x \text{ und } x \le 3; \end{aligned}$$
also $(X \cup Y) \cap Z = \{x : 2 < x \le 3\}$.

(c)
$$\begin{aligned} x \in X \cup (Y \cap Z) &\iff -1 \le x < 1 \text{ oder } (1 \le x \le 3 \text{ und } 2 < x < 4) \\ &\iff -1 \le x < 1 \text{ oder } (2 < x \text{ und } x \le 3); \end{aligned}$$
also $X \cup (Y \cap Z) = \{x : -1 \le x < 1\} \cup \{x : 2 < x \le 3\}$.

(d) $$\begin{aligned} x \in \mathrm{C}(X \cup Z) \cap Y &\iff x \in \mathbb{R} \setminus (X \cup Z) \text{ und } x \in Y \\ &\iff x \in \mathbb{R} \text{ und } x \notin (X \cup Z) \text{ und } x \in Y \\ &\iff x \in Y \text{ und } x \notin X \text{ und } x \notin Z \\ &\iff 1 \le x \le 3 \text{ und } (x < -1 \text{ oder } 1 \le x) \text{ und } (x \le 2 \text{ oder } 4 \le x) \\ &\iff (1 \le x \le 3) \text{ und } (x \le 2 \text{ oder } 4 \le x) \\ &\iff 1 \le x \le 2; \end{aligned}$$

also $\mathrm{C}(X \cup Z) \cap Y = \{x : 1 \le x \le 2\}$.

(e) $$\begin{aligned} x \in (Y \setminus Z) \cup X &\iff (x \in Y \text{ und } x \notin Z) \text{ oder } x \in X \\ &\iff \big(1 \le x \le 3 \text{ und } (x \le 2 \text{ oder } 4 \le x)\big) \text{ oder } -1 \le x < 1 \\ &\iff 1 \le x \le 2 \text{ oder } 4 \le x \le 3 \text{ oder } -1 \le x < 1 \\ &\iff -1 \le x \le 2; \end{aligned}$$

also $(Y \setminus Z) \cup X = \{x : -1 \le x \le 2\}$.

(f) $$\begin{aligned} x \in Y \setminus (Z \cup X) &\iff x \in Y \text{ und } x \notin Z \cup X \\ &\iff x \in Y \text{ und } (x \notin Z \text{ und } x \notin X) \\ &\iff 1 \le x \le 3 \text{ und } (x \le 2 \text{ oder } 4 \le x) \text{ und } (x < -1 \text{ oder } 1 \le x) \\ &\iff 1 \le x \le 2; \end{aligned}$$

also $Y \setminus (Z \cup X) = \{x : 1 \le x \le 2\}$.

1.5 Es sei $M = \{X_i : i \in I\}$ ein System von Mengen mit der Eigenschaft $\bigcap_{i \in I} X_i = \emptyset$. **12/1/5/1**
Beweisen oder widerlegen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels) die folgende Aussage:
Es gibt zwei Mengen $X_i, X_j \in M$, so daß $X_i \cap X_j = \emptyset$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.5 Durch ein Gegenbeispiel läßt sich die Aussage widerlegen. **12/1/5/2**

Lösung zu Aufgabe 1.5 Gegenbeispiel: Es sei $I = \mathbb{N}$ und $X_i := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{i+1}\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann ist offenbar $\bigcap_{i \in I} X_i = \emptyset$, aber für je zwei Indizes $i, j \in I$ gilt stets $X_i \cap Y_j \neq \emptyset$. **12/1/5/3**

1.6 Untersuchen Sie mit Hilfe von Wertetabellen, ob die folgenden Aussagen gültig sind: **12/1/6/1**

(a) $(\neg A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B) \to A$,

(b) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.6 Mit Hilfe der elementaren Eigenschaften der benutzten Konnektoren zeigt man in beiden Fällen, daß die Aussagen gültig sind. **12/1/6/2**

Lösung zu Aufgabe 1.6 **12/1/6/3**

(a) Es sei $\varphi := (\neg A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B)$ und $\psi := \varphi \to A$.

A	B	$\neg A$	$\neg A \to B$	$\neg B$	$\neg A \to \neg B$	φ	ψ
W	W	F	W	F	W	W	W
W	F	F	W	W	W	W	W
F	W	W	W	F	F	F	W
F	F	W	F	W	W	F	W

Die Aussage ist gültig.

(b) Es sei $\varphi := (A \to B) \wedge (B \to C)$ und $\psi := \varphi \to (A \to C)$.

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	φ	$A \to C$	ψ
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F	W
W	F	W	F	W	F	W	W
W	F	F	F	W	F	F	W
F	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	F	W	W
F	F	W	W	W	W	W	W
F	F	F	W	W	W	W	W

Die Aussage ist gültig.

1.7 Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen äquivalent sind: **12/1/7/1**

(a) $A \leftrightarrow B$; $(A \to B) \wedge (B \to A)$,

(b) $A \to B$; $B \to A$,

(c) $A \to B$; $\neg B \to \neg A$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.7 Mit Hilfe der elementaren Eigenschaften der benutzten Konnektoren berechnet man entsprechende Wertetabellen. Es gilt: **12/1/7/2**

(a) Die Aussagen sind äquivalent.

(b) Die Aussagen sind nicht äquivalent.

(c) Die Aussagen sind äquivalent.

Lösung zu Aufgabe 1.7 Wir berechnen dazu entsprechende Wertetabellen. **12/1/7/3**

(a) Es gilt:

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F
F	W	F	W	F	F
F	F	W	W	W	W

Die Aussagen sind äquivalent.

(b) Es gilt :

A	B	$A \to B$	$B \to A$
W	W	W	W
W	F	F	W
F	W	W	F
F	F	W	W

Die Aussagen sind nicht äquivalent.

(c) Es gilt :

A	B	$A \to B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \to \neg A$
W	W	W	F	F	W
W	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W
F	F	W	W	W	W

Die Aussagen sind äquivalent.

1.8 (leicht geänderte Fassung) Man gebe zu folgenden Aussagen je eine logisch äquivalente Alternative an (falls existent) und beweise die Gleichwertigkeit. (Hierbei soll eine Alternative höchstens die logischen Zeichen $\neg, \vee$ enthalten und $\neg$ höchstens vor A oder B stehen.) **12/1/8/1**

(a) $\neg(\neg A \wedge \neg B)$, (b) $A \to B$, (c) $\neg(A \to B)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.8 (a) $\neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv A \vee B$. **12/1/8/2**

(b) $A \to B \equiv \neg A \vee B$.

(c) Es gibt keine Alternative mit den geforderten Eigenschaften.

Lösung zu Aufgabe 1.8 **12/1/8/3**

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\neg(\neg A \wedge \neg B) &\equiv \neg\neg A \vee \neg\neg B \\ &\equiv A \vee B\end{aligned}$$

(b) Es ist $A \to B \equiv \neg A \vee B$, denn

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
W	W	W	F	W
W	F	F	F	F
F	W	W	W	W
F	F	W	W	W

Die Aussagen sind gleichwertig.

(c) Angenommen, es gibt eine derartige Alternative. Dann wäre $\neg(A \to B)$ zu einer der folgenden Alternativen äquivalent: $A \vee B$, $A \vee \neg B$, $\neg A \vee B$, $\neg A \vee \neg B$.
Es gilt :

A	B	$A \to B$	$\neg(A \to B)$	$A \vee B$	$A \vee \neg B$	$\neg A \vee B$	$\neg A \vee \neg B$
W	W	W	F	W	W	W	F
W	F	F	W	W	W	F	W
F	W	W	F	W	F	W	W
F	F	W	F	F	W	W	W

Aus der Wertetabelle geht hervor, daß $\neg(A \to B)$ zu keiner der Alternativen äquivalent ist.

1.9 Es sei R eine zweistellige Relation in $\mathbb{R}$. **12/1/9/1**
Verneinen Sie die folgenden Aussagen und führen Sie die jeweilige Verneinung so weit wie möglich aus:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R$.

(b) Nicht für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es reelle Zahlen y_1, y_2 mit $y_1 \neq y_2$ und $(x, y_1) \in R$ und $(x, y_2) \in R$.

(c) Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so daß für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt: $(x, y) \notin R$.

(d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.9 Die Lösung ergibt sich in jedem Fall durch einfache Negation der Quantoren. **12/1/9/2**

Lösung zu Aufgabe 1.9 **12/1/9/3**

(a) Nicht$\big($für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R\big)$ $\iff$
es gibt ein $x \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt: $(x, y) \notin R$.
[Hinweis: „für alle …“ und „für jedes …“ werden hier synonym gebraucht.]

(b) Da die Aussage schon negiert ist, entsteht durch erneute Verneinung eine doppelte Negation; die gewünschte äquivalente Aussage ist somit:
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es reelle Zahlen y_1, y_2 mit $y_1 \neq y_2$ und $(x, y_1) \in R$ und $(x, y_2) \in R$.

(c) Nicht$\big($es existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so daß für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt: $(x, y) \notin R\big)$ $\iff$
für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$, so daß $(x, y) \in R$.

(d) Die Negation von: „es gibt genau ein …“ ist „es gibt kein … (bzw. nicht(es gibt ein) …)“ oder „es gibt zwei …“. Folglich gilt:
Nicht$\big($für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R\big)$ $\iff$
es gibt ein $x \in \mathbb{R}$, so daß $\Big($es gibt kein $y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \in R$ oder es gibt ein $y_1 \in \mathbb{R}$ und es gibt ein $y_2 \in \mathbb{R}$, so daß $y_1 \neq y_2$ und $(x, y_1) \in R$ und $(x, y_2 \in R)\Big)$.

1.10 Betrachten Sie in einem rechtwinkligen (x, y)-Koordinatensystem die Geraden g_1, g_2, g_3 mit den sie darstellenden Gleichungen **12/1/10/1**
$g_1 : y = -x + 8; \quad g_2 : y = 3; \quad g_3 : y = x + 5.$

Durch diese Geraden wird ein Dreieck bestimmt. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind !
Die inneren Punkte dieses Dreiecks sind alle Punkte, für deren Koordinaten (x, y) gilt:

(a) $y > -x + 8$ oder $y < 3$ oder $y > x + 5$,

(b) $y > -x + 8$ und $y < 3$ und $y > x + 5$,

(c) $y < -x + 8$ und $y > 3$ und $y < x + 5$,

(d) $y < -x + 8$ oder $y > 3$ oder $y < x + 5$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.10 (a) falsch, **12/1/10/2**

(b) falsch,

(c) wahr,

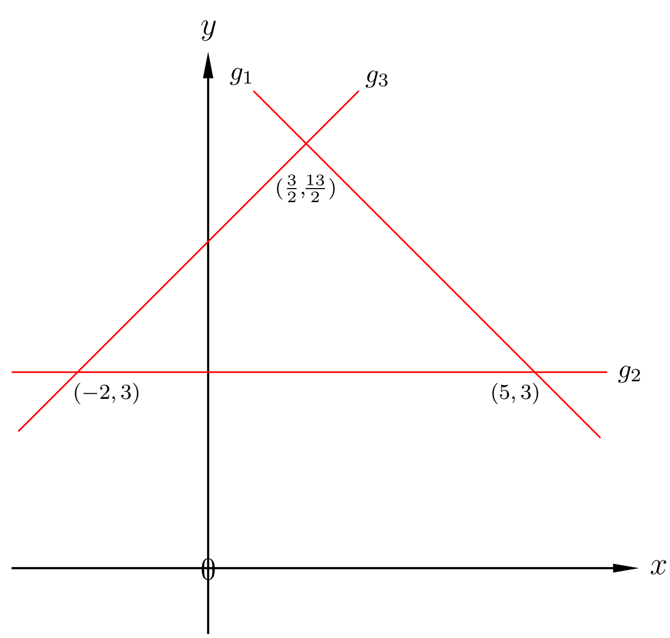
(d) falsch.

Lösung zu Aufgabe 1.10 Wir berechnen zunächst die Schnittpunkte der Geraden, um eine Vorstellung von dem resultierenden Dreieck zu erhalten: **12/1/10/3**

$-x + 8 = 3 \iff x = 5$; im Punkt $(5, 3)$ schneiden sich g_1 und g_2.

$x + 5 = 3 \iff x = -2$; im Punkt $(-2, 3)$ schneiden sich g_2 und g_3.

$-x + 8 = x + 5 \iff x = \frac{3}{2}$; im Punkt $(\frac{3}{2}, \frac{13}{2})$ schneiden sich g_1 und g_3.



(a) trifft nicht zu, da kein Punkt (x, y) mit $y < 3$ innerer Punkt des Dreiecks sein kann.

(b) Hier kann die gleiche Argumentation wie unter (a) verwendet werden.

(c) trifft zu, denn für jeden inneren Punkt (x, y) des Dreiecks gilt offenbar: $y > 3$; weiterhin liegt (x, y) unterhalb von g_1, also $y < -x + 8$ und unterhalb von g_1, also $y < x + 5$.

(d) Wäre (d) richtig, so müßte z.B. $(0, 0)$ innerer Punkt des Dreiecks sein, was der Bedingung $y > 3$ widerspricht.

1.11 Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß: **12/1/11/1**

(a) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ für alle $x > -1$, (Bernoullische Ungleichung)

(b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.11 Die Induktion ist leicht ausführbar. **12/1/11/2**

Lösung zu Aufgabe 1.11 **12/1/11/3**

(a) 1. *Anfangsschritt*: $n = 0$; hierfür ist die Ungleichung offenbar erfüllt.
2. *Induktionsvoraussetzung*: Für n gelte die Behauptung bereits.
3. *Induktionsbehauptung*: Es gilt auch $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$.
Es ist

$$\begin{aligned}
(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n(1 + x) \\
&\geq (1 + nx)(1 + x) \\
&= 1 + x + nx + nx^2 \\
&\geq 1 + (n + 1)x.
\end{aligned}$$

(b) 1. Für $n = 1$ ist die Gleichung erfüllt.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir zeigen: $1^2 + 2^2 + \ldots + (n + 1)^2 = \dfrac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6}$.
Es ist

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{6}(n + 1)(n + 2)(2n + 3) &= \tfrac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6) \\
&= \tfrac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) + \tfrac{1}{6}(6n^2 + 12n + 6) \\
&= \tfrac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) + n^2 + 2n + 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n + 1)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} i^2.
\end{aligned}$$

1.12 Beweisen Sie durch vollständige Induktion: **12/1/12/1**

(a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar.

(b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt: $2^n + 1 \geq n^2$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.12 (a) Im Induktionsschritt genügt nachzuweisen, daß $3{\cdot}4^n + 15$ durch 9 teilbar ist. Dies erfolgt durch eine erneute Induktion. **12/1/12/2**

(b) Im Induktionsschritt genügt nachzuweisen, daß $2^n \geq 2n + 1$ für $n \geq 3$.
Dies zeigt man leicht durch eine erneute Induktion.

Lösung zu Aufgabe 1.12 **12/1/12/3**

(a) 1. Für $n = 1$ ist $4^n + 15n - 1$ durch 9 teilbar.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir zeigen: $4^{n+1} + 15(n+1) - 1$ ist durch 9 teilbar.
Es ist $4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4^n + 15n - 1 + 3 \cdot 4^n + 15$.
Aufgrund der Induktionsvoraussetzung ist $4^n + 15n - 1$ durch 9 teilbar.
Es genügt also nachzuweisen, daß auch $3 \cdot 4^n + 15$ durch 9 teilbar ist.
Offenbar genügt zu zeigen: $3|(4^n + 5)$.
Dies beweisen wir durch eine erneute Induktion.
(α) Für $n = 1$ ist $4^n + 5 = 9$ durch 3 teilbar.
(β) Für n gelte die Behauptung bereits.
(γ) Wir beweisen $3|(4^{n+1} + 5)$.
Es ist $4^{n+1} + 5 = 4^n + 5 + 3 \cdot 4^n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $4^n + 5$ durch 3 teilbar und offenbar teilt 3 auch $3 \cdot 4^n$; folglich gilt die Behauptung.

(b) 1. Für $n = 3$ ist die Ungleichung richtig.
2. Für ein $n \geq 3$ gelte die Behauptung bereits.
3. Wir zeigen $2^{n+1} + 1 \geq (n+1)^2$.
Es ist

$$2^{n+1} + 1 = 2^n \cdot 2 + 1 = 2^n + 1 + 2^n > n^2 + 2^n \geq (n+1)^2,$$

falls $2^n \geq 2n + 1$ für $n \geq 3$. Dies zeigt man leicht induktiv über n.

1.13 Beweisen Sie: **12/1/13/1**

(a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\binom{2n}{n} \geq 2^n$, wobei $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.13 (a) Im Induktionsschritt genügt zu zeigen, daß **12/1/13/2**
$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$.
Durch Quadrieren läßt sich die Ungleichung leicht verifizieren.

(b) Der Beweis befolgt problemlos; es genügt, $\frac{2(2n+1)}{n+1} \geq 2$ nachzuweisen.

Lösung zu Aufgabe 1.13 Wir beweisen die Ungleichungen induktiv über n. **12/1/13/3**

(a) 1. Für $n = 1$ ist die Ungleichung erfüllt.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir zeigen die Behauptung für $n + 1$. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \\ &< \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \text{ (nach Induktionsvoraussetzung)}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}. \quad \text{(dies ist noch nachzuweisen)}$$

Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}} \iff \frac{\sqrt{3n+4}}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{2n+2}{2n+1} \iff$$

$$\frac{3n+4}{3n+1} \leq \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)^2} \iff (3n+4)(2n+1)^2 \leq 4(3n+1)(n+1)^2 \iff$$

$$12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4 \iff 0 \leq n;$$

und dies gilt.

(b) 1. Für $n = 1$ ist die Ungleichung erfüllt.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir zeigen: $\binom{2(n+1)}{n+1} \geq 2^{n+1}$.
Es ist

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}$$

$$\geq 2^n \cdot \frac{2(2n+1)}{n+1} \geq 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.$$

1.14 Beweisen Sie: **12/1/14/1**

(a) Ist $k \in \mathbb{N}$ gerade, so ist k^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 2^n teilbar.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 7$ ist $3^n \leq n!$.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.14 Die Beweise lassen sich sehr leicht führen. **12/1/14/2**

Lösung zu Aufgabe 1.14 Die Beweise erfolgen induktiv über n. **12/1/14/3**

(a) 1. Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig.
2. Für n gelte bereits: $2^n | k^n$.
3. Wir zeigen: $2^{n+1} | k^{n+1}$.
Es ist $k^{n+1} = k^n \cdot k$. Nach Induktionsvoraussetzung ist k^n durch 2^n teilbar.
Da k gerade ist, teilt 2 auch k. Also $2^{n+1} | k^{n+1}$.

(b) 1. Für $n = 7$ ist $3^n = 2187$ und $n! = 5040$, also $3^n \leq n!$.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir zeigen: $3^{n+1} \leq (n+1)!$. Es ist

$$3^{n+1} = 3^n \cdot 3 \leq n! \cdot 3 \leq n!(n+1) = (n+1)!.$$

(c) 1. Für $n = 1$ gilt die Gleichheit.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir zeigen: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}\\ &= \frac{n(2n-1)(2n+1)+3(2n+1)^2}{3}\\ &= \frac{(2n+1)\big(n(2n-1)+3(2n+1)\big)}{3}\\ &= \frac{(2n+1)(n+1)(2n+3)}{3}.\end{aligned}$$

1.15 Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen n gilt: **12/1/15/1**

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.15 Die Beweise lassen sich sehr leicht führen. **12/1/15/2**

Lösung zu Aufgabe 1.15 Die Beweise erfolgen induktiv über n. **12/1/15/3**

(a) 1. Für $n = 1$ ist die Gleichung richtig.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir zeigen: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}\\ &= \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right)(n+1)\\ &= \frac{2n^2+7n+6}{6}\cdot(n+1)\\ &= \frac{(n+2)(2n+3)(n+1)}{6}.\end{aligned}$$

(b) 1. Für $n = 1$ ist die Gleichung richtig.
2. Für n gelte die Behauptung bereits.
3. Wir beweisen: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\cdot\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n + 1\right)\\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\cdot(n+2)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

(c) 1. Für $n = 1$ ist die Gleichung richtig.

2. Für n gelte die Behauptung bereits.

3. Wir zeigen: $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+2}$.

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung erhält man

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 + \frac{-n-2+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

1.16 Es sei a eine reelle Zahl mit $a \neq 0$. **12/1/16/1**

Zeigen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen n gilt: $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 1.16 Der Beweis erfolgt problemlos. **12/1/16/2**

Lösung zu Aufgabe 1.16 Der Beweis erfolgt induktiv über n. **12/1/16/3**

1. Für $n = 0$ ist die Gleichung richtig.

2. Für n gelte die Behauptung bereits.

3. Wir zeigen: $\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$.

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung ist

$$\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}+(1-a)\cdot a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}.$$

12.2 Reelle Zahlen

2.1 Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $(a+b)^2 \geq 4ab$. **12/2/1/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.1 Man benutzt die Eigenschaft $0 \leq (a-b)^2$. **12/2/1/2**

Lösung zu Aufgabe 2.1 Wegen $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ist $4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$. **12/2/1/3**

2.2 Es seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die verallgemeinerte Dreiecksungleichung: **12/2/2/1**

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i\Big| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.2 Mit Hilfe der Dreiecksungleichung ergibt sich die Behauptung sehr einfach. **12/2/2/2**

Lösung zu Aufgabe 2.2 Der Beweis erfolgt induktiv über n **12/2/2/3**

(wir setzen die Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$ voraus).

1. Für $n = 2$ gilt die Behauptung aufgrund der Dreiecksungleichung.

2. Für n gelte die zu beweisende Ungleichung bereits.

3. Wir zeigen: $\left|\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|$.

Es ist $\left|\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{i+1}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| + |a_{i+1}| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| + |a_{i+1}| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

2.3 Beweisen Sie: **12/2/3/1**
Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und ist $1 < a$, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $a^n > b$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.3 Man benutze die Bernoullische Ungleichung und das archimedische Axiom. **12/2/3/2**

Lösung zu Aufgabe 2.3 (Im Beweis werden die Bernoullische Ungleichung und das Archimedische Axiom benutzt.) **12/2/3/3**
Es sei $a := 1 + h$; wegen $a > 1$ ist $h > 0$. Aus der Bernoullischen Ungleichung erhält man $a^m = (1+h)^m \geq 1 + mh > mh$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Wegen $h > 0$ existiert nach dem Archimedischen Axiom ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $nh > b$. Folglich gilt $a^n > b$.

2.4 Zeigen Sie, daß für $a \in \mathbb{R}$ und $a \geq 1$ gilt: $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$. **12/2/4/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.4 Die störenden Wurzeln werden durch (mehrmaliges) Quadrieren beseitigt. **12/2/4/2**
(Achtung: Vorzeichen der zu quadrierenden Terme beachten!)

Lösung zu Aufgabe 2.4 Wegen $a > 1$ sind beide Seiten der zu beweisenden Ungleichung positiv. Folglich gilt nach Quadrieren: **12/2/4/3**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} &\iff \frac{1}{a} < a+1-2\sqrt{a+1}\sqrt{a-1}a-1 = 2a - 2\sqrt{a^2-1} \\
&\iff 1 < 2a^2 - 2a\sqrt{a^2-1} \\
&\iff 2a\sqrt{a^2-1} < 2a^2 - 1 \quad \text{(beide Seiten positiv)} \\
&\iff 4a^2(a^2-1) < 4a^4 - 4a^2 + 1 \\
&\iff 0 < 1; \quad \text{und dies gilt.}
\end{aligned}$$

2.5 Für $a, b \in \mathbb{R}$ zeige man: **12/2/5/1**

(a) Wenn $a, b \geq 0$, so $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

(b) Wenn $a, b > 0$, so $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

(c) Wenn $a, b > 0$ und $a \cdot b = 1$, so $a + b \geq 2$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.5 Durch einfache Abschätzungen erhält man die Behauptungen. **12/2/5/2**

Lösung zu Aufgabe 2.5 **12/2/5/3**

(a) Es ist

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \iff 2\sqrt{ab} \leq a + b \iff 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$$
$$\iff 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a - b^2);$$

und die letzte Ungleichung gilt.

(b) Es ist

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \iff a^2 + b^2 \geq 2ab \iff a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0;$$

und dies gilt.

(c) Wegen $ab = 1$ ist $b = \frac{1}{a}$. Somit ist

$$a + b = a + \frac{1}{a} = \frac{a^2 + 1}{a} \geq 2 \iff a^2 + 1 \geq 2a \iff a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geq 0;$$

und dies gilt.

2.6 Man bestimme die jeweilige Menge der reellen Zahlen x, die die folgenden Ungleichungen erfüllt: **12/2/6/1**

(a) $\frac{3x+2}{2x+3} > x + 1$ (b) $\frac{2x+1}{3x-3} > \frac{3x-3}{2x+1}$ (c) $\frac{2}{x+1} > \frac{1}{x-2}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.6 Es sei L die Lösungsmenge der jeweiligen Ungleichung. **12/2/6/2**

(a) $L = \{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{3}{2}\}$.

(b) $L = (-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}) \cup (1, 4)$ (Vereinigung von Intervallen).

(c) $L = (-1, 2) \cup (5, \infty)$ (Vereinigung von Intervallen).

Lösung zu Aufgabe 2.6 **12/2/6/3**

(a) $(\star)$ bezeichne die Ungleichung (a).
Wir nehmen zunächst eine Fallunterscheidung vor; die Lösungsmenge für den i-ten Fall wird mit L_i bezeichnet.

1. $2x + 3 > 0$, also $x > -\frac{3}{2}$. Hierfür gilt:

$$(\star) \iff 3x + 2 > (x + 1)(2x + 3) = 2x^2 + 5x + 3 \iff 0 > 2x^2 + 2x + 1$$
$$\iff 0 > x^2 + x + \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

Diese Ungleichung ist durch kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, also $L_1 = \emptyset$.

2. $2x+3<0$, also $x<-\frac{3}{2}$. Hierfür gilt:

$$(\star) \iff 3x+2<(x+1)(2x+3) \iff 0<\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{1}{4}.$$

Diese Ungleichung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, also $L_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{3}{2}\right\}$.
Insgesamt erhält man als Lösungsmenge $L = L_2$.

(b) $(\star\star)$ bezeichne die Ungleichung (b).
Wir nehmen zunächst wieder eine Fallunterscheidung vor:
1. $3x-3>0$ und $2x+1>0 \iff x>1$ und $x>-\frac{1}{2} \iff x>1$. Dann gilt:

$$(\star\star) \iff (2x+1)^2>(3x-3)^2 \iff 2x+1>3x-3 \iff 4>x.$$

Die Lösungsmenge hierfür $L_1 = \{x \in \mathbb{R} : 1<x<4\}$.
2. $3x-3>0$ und $2x+1<0 \iff 1<x<-\frac{1}{2}$; $\lightning$! $L_2=\emptyset$.
3. $3x-3<0$ und $2x+1>0 \iff x<1$ und $-\frac{1}{2}<x<1$. Dann gilt:

$$(\star\star) \iff (2x+1)^2<(3x-3)^2=(\underbrace{3-3x}_{>0})^2$$
$$\iff 2x+1<3-3x \iff x<\tfrac{2}{5}.$$

Es ist $L_3 = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2}<x<\frac{2}{5}\}$.
4. $3x-3<0$ und $2x+1<0 \iff x<1$ und $x<-\frac{1}{2} \iff x<-\frac{1}{2}$.

$$(\star\star) \iff (1+2x)^2>(3-3x)^2 \iff 1+2x>3-3x \iff x>\tfrac{2}{5}.$$

Wegen $x<-\frac{1}{2}$ und $x>\frac{2}{5}$ ist $L_4=\emptyset$.
Insgesamt erhält man als Lösungsmenge die Vereinigung von L_1 und L_3:
$L = (-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}) \cup (1,4)$.

(c) $(\star\star\star)$ bezeichne die Ungleichung (c).
Es wird wieder eine Fallunterscheidung vorgenommen:
1. $x+1>0$ und $x-2>0 \iff x>-1$ und $x>2 \iff x>2$. Dann gilt:

$$(\star\star\star) \iff 2(x-2)>x+1 \iff x>5.$$

$L_1 = \{x \in \mathbb{R} : x>5\}$.
2. $x+1>0$ und $x-2<0 \iff -1<x<2$. Dann gilt:

$$(\star\star\star) \iff 2(x-2)<x+1 \iff x<5.$$

Somit ist $L_2 = \{x \in \mathbb{R} : -1<x<2\}$.
3. $x+1<0$ und $x-2>0 \iff 2<x<-1$, $\lightning$! Also $L_3=\emptyset$.
4. $x+1<0$ und $x-2<0 \iff x<-1$ und $x<2 \iff x<-1$. Dann gilt:

$$(\star\star\star) \iff 2(x-2)>x+1 \iff x>5.$$

Also $L_4 = \{x \in \mathbb{R} : 5<x<-1\} = \emptyset$.
Die Gesamtlösungsmenge ist $L = L_1 \cup L_2 = (-1,2) \cup (5,\infty)$.

2.7 Lösen Sie die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen: **12/2/7/1**

(a) $\dfrac{|x-1|}{2x+3} = \frac{1}{3}$, (b) $|2x-1| < |x-1|$, (c) $|x+2| + |x-2| \leq 12$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.7 Es sei L die Lösungsmenge der jeweiligen Ungleichung. Durch geeignete Fallunterscheidung vermeidet man die Beträge. **12/2/7/2**

(a) $L = \{0, 6\}$.

(b) $L = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{2}{3}\}$.

(c) $L = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq 6\}$.

Lösung zu Aufgabe 2.7 **12/2/7/3**

(a) $(\star)$ bezeichne die Gleichung (a).
Wir nehmen folgende Fallunterscheidung vor:

1. $x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$ und $|x-1| = x - 1$. Dann gilt:
$$(\star) \iff 3(x-1) = 2x + 3 \iff x = 6; \quad L_1 = \{6\}.$$
2. $x - 1 < 0 \iff x < 1$ und $|x-1| = 1 - x$. Dann gilt:
$$(\star) \iff 3(1-x) = 2x + 3 \iff -5x = 0 \iff x = 0; \quad L_2 = \{0\}.$$

Die gesamte Lösungsmenge beträgt $L = \{0, 6\}$.

(b) $(\star\star)$ bezeichne die Ungleichung (b).
Wir nehmen wieder eine Fallunterscheidung vor:

1. $2x-1 \geq 0$ und $x-1 \geq 0 \iff x \geq 1$ und $|2x-1| = 2x-1$ und $|x-1| = x-1$.
Dann gilt:
$$(\star\star) \iff 2x - 1 < x - 1 \iff x < 0;$$
also $L_1 = \emptyset$.
2. $2x - 1 \geq 0$ und $x - 1 < 0 \iff \frac{1}{2} \leq x < 1$ und $|2x-1| = 2x - 1$ und $|x-1| = 1 - x$. Dann gilt:
$$(\star\star) \iff 2x - 1 < 1 - x \iff 3x < 2 \iff x < \tfrac{2}{3};$$
$L_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}\right\}$.
3. $2x - 1 < 0$ und $x - 1 \geq 0$; also $1 \leq x < \frac{1}{2}$, $\lightning$! $L_3 = \emptyset$.
4. $2x-1 < 0$ und $x-1 < 0 \iff x < \frac{1}{2}$ und $|2x-1| = 1-2x$ und $|x-1| = 1-x$.
Dann gilt:
$$(\star\star) \iff 1 - 2x < 1 - x \iff 0 < x;$$
also $L_4 = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{2}\}$.

Die Gesamtlösungsmenge beträgt $L = L_2 \cup L_4 = (0, \frac{2}{3})$.

(c) $(\star\star\star)$ bezeichne die Ungleichung (c).
Wir nehmen wieder eine Fallunterscheidung vor:
1. $x+2 \geq 0$ und $x-2 \geq 0 \iff x \geq 2$ und $|x+2| = x+2$ und $|x-2| = x-2$.
Dann gilt:
$$(\star\star\star) \iff x+2+x-2 \leq 12 \iff x \leq 6;$$
also $L_1 = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 6\}$.
2. $x+2 \geq 0$ und $x-2 < 0 \iff -2 \leq x < 2$ und $|x+2| = x+2$ und $|x-2| = 2-x$. Dann gilt:
$$(\star\star\star) \iff x+2+2-x \leq 12 \iff 0 \leq 8;$$
diese Ungleichung ist für alle x erfüllt. Also $L_2 = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\}$.
3. $x+2 < 0$ und $x-2 \geq 0 \iff 2 \leq x \leq -2$, ↯! $L_3 = \emptyset$.
4. $x+2 < 0$ und $x-2 < 0 \iff x \leq -2$ und $|x+2| = -x-2$ und $|x-2| = 2-x$.
Dann gilt:
$$(\star\star\star) \iff -x-2+2-x \leq 12 \iff x \geq -6;$$
also $L_4 = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq -2\}$.
Die Gesamtlösungsmenge beträgt also $L = L_1 \cup L_2 \cup L_4 = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq 6\}$.

2.8 Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, für die jeweils gilt: **12/2/8/1**
(a) $\big||x|+1\big| = 2$, (b) $|x-1| \leq |2x+5|$, (c) $|x+1| + |x-1| = |x|$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.8 Es sei L die Lösungsmenge der jeweiligen Ungleichung. Durch geeignete Fallunterscheidung vermeidet man die Beträge. **12/2/8/2**

(a) $L = \{-1, 1\}$.

(b) $L = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : -6 < x < -\frac{4}{3}\}$.

(c) $L = \{-2, 0, 2\}$.

Lösung zu Aufgabe 2.8 **12/2/8/3**

(a) $(\star)$ bezeichne die Gleichung (a).
Es gilt stets $|x|+1 > 0$, folglich ist $\big||x|+1\big| = |x|+1$ und somit
$$(\star) \iff |x|+1 = 2 \iff |x| = 1.$$
Daraus ergibt sich als Lösungsmenge $L = \{-1, 1\}$.

(b) $(\star\star)$ bezeichne die Ungleichung (b).
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
1. $x-1 \geq 0$ und $2x+5 \geq 0 \iff x \geq 1$ und $|x-1| = x-1$ und $|2x+5| = 2x+5$.
Dann gilt:
$$(\star\star) \iff x-1 \leq 2x+5 \iff -6 \leq x;$$
also $L_1 = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x\}$.

2. $x - 1 \geq 0$ und $2x + 5 < 0 \iff 1 \leq x \leq -\frac{5}{2}$, ↯!
Also $L_1 = \emptyset$.
3. $x - 1 < 0$ und $2x + 5 \geq 0 \iff -\frac{5}{2} \leq x < 1$ und $|x - 1| = 1 - x$ und $|2x + 5| = 2x + 5$. Dann gilt:

$$(\star\star) \iff 1 - x \leq 2x + 5 \iff -\tfrac{4}{3} \leq x;$$

also $L_3 = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{4}{3} \leq x < 1\}$.
4. $x - 1 < 0$ und $2x + 5 < 0 \iff x < -\frac{5}{2}$ und $|x - 1| = 1 - x$ und $|2x + 5| = -2x - 5$. Dann gilt:

$$(\star\star) \iff 1 - x \leq -2x - 5 \iff x \leq -6;$$

also $L_4 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -6\}$.
Damit ist die Gesamtlösungsmenge $L = L_1 \cup L_3 \cup L_4 = \mathbb{R} \setminus (-6, -\frac{4}{3})$.

(c) $(\star\star\star)$ bezeichne die Ungleichung (c).
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
1. $x \geq 1$; somit $|x + 1| = x + 1$, $|x - 1| = x - 1$ und $|x| = x$. Dann gilt:

$$(\star\star\star) \iff x + 1 + x - 1 = x \iff x = 0; \quad \text{also } L_1 = \{0\}.$$

2. $0 \leq x < 1$; somit ist $|x + 1| = x + 1$, $|x - 1| = 1 - x$ und $|x| = x$.
Folglich ist:

$$(\star\star\star) \iff x + 1 + 1 - x = x \iff x = 2; \quad \text{also } L_2 = \{2\}.$$

3. $-1 \leq x < 0$; damit ist $|x + 1| = x + 1$, $|x - 1| = 1 - x$ und $|x| = -x$.
Folglich ist:

$$(\star\star\star) \iff x + 1 + 1 - x = -x \iff x = -2; \quad \text{also } L_3 = \{-2\}.$$

4. $x < -1$; somit ist $|x + 1| = -x - 1$, $|x - 1| = 1 - x$ und $|x| = -x$.
Folglich ist:

$$(\star\star\star) \iff -x - 1 + 1 - x = -x \iff x = 0; \quad \text{also } L_4 = \{0\}.$$

Die Gesamtlösungsmenge ist $L = \{-2, 0, 2\}$.

2.9 Bilden Sie $M \cap N$, $M \cup N$, $M \setminus N$, $N \setminus M$ für die folgenden Mengen von reellen Zahlen: **12/2/9/1**

$M = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| > |2x + 3|\}$, $\qquad N = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 3| < |4x - 7|\}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.9 Durch geeignete Fallunterscheidung vermeidet man die Beträge. Es ist **12/2/9/2**

$$M = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x < -\tfrac{2}{3}\},\ N = \{x \in \mathbb{R} : x < \tfrac{2}{3}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 5 < x\}.$$

Wegen $M \subseteq N$ ist

$$M \cap N = M,\ M \cup N = N,\ M \setminus N = \emptyset \text{ und}$$

$$N \setminus M = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -4\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -\tfrac{2}{3} \leq x \leq \tfrac{2}{3}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 5 < x\}.$$

Lösung zu Aufgabe 2.9 Wir bestimmen die Mengen M, N und betrachten dazu zunächst die Ungleichung **12/2/9/3**

$(\star)\ :\ |x-1| > |2x+3|$.

Es werden folgende Fallunterscheidungen vorgenommen:

1. $x-1 \geq 0 \iff x \geq 1$ und $|x-1| = x-1,\ |2x+3| = 2x+3$. Dann gilt:

$$(\star) \iff x-1 > 2x+3 \iff -4 > x.$$

Also $L_1 = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < -4\} = \emptyset$.

2. $x-1 < 0$ und $2x+3 \geq 0 \iff -\frac{3}{2} \leq x < 1$ und $|x-1| = 1-x,\ |2x+3| = 2x+3$. Dann gilt:

$$(\star) \iff 1-x > 2x+3 \iff -\tfrac{2}{3} > x.$$

Also $L_2 = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{2}{3}\}$.

3. $x-1 \geq 0$ und $2x+3 < 0 \iff 1 \leq x < -\frac{3}{2}$, $\lightning$!

Also $L_3 = \emptyset$.

4. $x-1 < 0$ und $2x+3 < 0 \iff x < -\frac{3}{2}$ und $|x-1| = 1-x,\ |2x+3| = -2x-3$. Folglich gilt:

$$(\star) \iff 1-x > -2x-3 \iff x > -4.$$

Also $L_4 = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x < -\frac{3}{2}\}$, und schließlich

$$M = L_2 \cup L_4 = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x < -\tfrac{2}{3}\}.$$

Es sei nun $(\star\star)\ :\ |2x+3| < |4x-7|$.

Wir nehmen auch hier wieder eine Fallunterscheidung vor.

1. $2x+3 \geq 0$ und $4x-7 \geq 0 \iff x \geq \frac{7}{4}$ und $|2x+3| = 2x+3,\ |4x-7| = 4x-7$. Folglich gilt:

$$(\star\star) \iff 2x+3 < 4x-7 \iff 5 < x.$$

Also $L_1 = \{x \in \mathbb{R} : 5 < x\}$.

2. $2x+3 < 0$ und $4x-7 \geq 0 \iff \frac{7}{4} \leq x < -\frac{3}{2}$, $\lightning$! Also $L_2 = \emptyset$.

3. $2x+3 \geq 0$ und $4x-7 < 0 \iff -\frac{3}{2} \leq x < \frac{7}{4}$ und $|2x+3| = 2x+3,\ |4x-7| = 7-4x$. Dann gilt:

$$(\star\star) \iff 2x+3 < 7-4x \iff x < \tfrac{2}{3}.$$

Also $L_3 = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{3}{2} \leq x < \frac{2}{3}\}$.

4. $2x+3 < 0$ und $4x-7 < 0 \iff x < -\frac{3}{2}$ und $|2x+3| = -2x-3,\ |4x-7| = 7-4x$. Dann gilt:

$(\star\star) \iff -2x-3 < 7-4x \iff x < 5.$

Also $L_4 = \{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{3}{2}\}$, und schließlich

$$N = \{x \in \mathbb{R} : x < \tfrac{2}{3}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 5 < x\}.$$

Wegen $M \subseteq N$ ist

$$M \cap N = M = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x < -\tfrac{2}{3}\}, \quad M \cup N = N, \quad M \setminus N = \emptyset.$$

Weiterhin ist

$$N \setminus M = \{x \in \mathbb{R} : x \le -4\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -\tfrac{2}{3} \le x < \tfrac{2}{3}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 5 < x\}.$$

2.10 Geben Sie (falls existent) Infimum und Supremum folgender Mengen an: **12/2/10/1**

(a) $\{x \in \mathbb{R} : x^4 - 3x^2 - 2x \le 0\}$,

(b) $\{n \in \mathbb{N} : n \neq 0\}$,

(c) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\right\}$,

(d) $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\right\}$,

(e) $\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0\right\}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.10 Es seien $M_a, \ldots, M_e$ die in den Aufgaben (a) - (e) gegebenen Mengen. **12/2/10/2**

(a) $\inf M_a = 0$, $\sup M_a = 2$.

(b) $\inf M_b = 1$, $\sup M_b$ existiert nicht.

(c) $\inf M_c = 0$, $\sup M_c = 1$.

(d) $\inf M_d = 0$, $\sup M_d = \frac{2}{3}$.

(e) $\inf M_e = \frac{1}{2}$, $\sup M_e = 2$.

Lösung zu Aufgabe 2.10 **12/2/10/3**

(a) Es sei $p(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$ und $M_a = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \le 0\}$.
Es ist $p(x) = x(x^3 - 3x - 2)$; durch „probieren" erkennt man, daß -1 eine Nullstelle von p ist. Folglich ist $x^3 - 3x - 2$ durch $x+1$ teilbar. Das verbleibende quadratische Polynom hat die Nullstellen -1 und 2.
Folglich ist $p(x) = x(x+1)^2(x-2)$.
Damit gilt: $p(x) \le 0 \iff x(x-2) \le 0$.
1. Fall: $x < 0$; dann gilt:
$$x(x-2) \le 0 \iff x-2 \ge 0 \iff x \ge 2. \text{ Also } 2 \le x < 0, \quad ↯!$$
2.Fall: $x \ge 0$; dann gilt:
$$x(x-2) \le 0 \iff x-2 \le 0 \iff x \le 2.$$
Insgesamt $p(x) \le 0 \iff 0 \le x \le 2$.
Folglich ist $\inf M_a = 0$ und $\sup M_a = 2$.

(b) Es sei $M_b = \{n \in \mathbb{N} : n \neq 0\}$.
Dann ist $\inf M_b = 1$ und das Supremum von M_b existiert nicht.

(c) Es sei $M_c = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}$ und $n \neq 0\}$.
Dann ist offenbar $\inf M_c = 0$ und $\sup M_c = 1$.

(d) Sei $M_d = \{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}$ und $n \neq 0\}$.
Für $n = 1$ bzw. $n = 2$ ist $1 + \frac{(-1)^n}{n} = 0$ bzw. $= \frac{3}{2}$. Schließlich gilt:
$0 \leq 1 + \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{3}{2}$ für alle $n \neq 0$. Also $\inf M_d = 0$ und $\sup M_d = \frac{3}{2}$.

(e) Sei $M_e = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \neq 0 \right\}$.
Für $a_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ ist $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \geq 1$. Folglich ist $\inf M_e = a_1 = \frac{1}{2}$.
Weiterhin gilt $a_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$ (nach Aufgabe 1.16)
Offenbar ist 2 eine obere Schranke von M_e.
Angenommen, es gibt ein $c < 2$ und c ist auch eine obere Schranke von M_e, dann ist $a_n \leq c := 2 - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$.
Damit erhält man:

$$2 - \frac{1}{2^n} \leq c = 2 - \varepsilon \iff \varepsilon \leq \frac{1}{2^n} \iff \frac{1}{\varepsilon} \geq 2^n \geq 2n \text{ für alle } n \geq 1;$$

und dies widerspricht dem Archimedischen Axiom.
Folglich ist 2 die kleinste obere Schranke von M_e und somit $\sup M_e = 2$.

2.11 Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere Mengen, die ein Supremum besitzen; außerdem sei **12/2/11/1**

$$X + Y = \{x + y : x \in X \text{ und } y \in Y\}.$$

Man beweise, daß dann $\sup X + \sup Y = \sup(X + Y)$ gilt.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.11 Man zeige, daß $\sup X + \sup Y$ die kleinste obere Schranke von $X + Y$ ist. „Obere Schranke“ ist fast trivial. „Kleinste obere Schranke“ läßt sich am einfachsten indirekt nachweisen. **12/2/11/2**

Lösung zu Aufgabe 2.11 Nach Voraussetzung sind X und Y nach oben beschränkt, folglich gilt dies auch für die Menge $X + Y$. **12/2/11/3**

Es genügt zu zeigen, daß $\sup X + \sup Y$ die kleinste obere Schranke von $X + Y$ ist.

Für $x \in X$ und $y \in Y$ ist $x \leq \sup X$ und $y \leq Y$, also $x + y \leq \sup X + \sup Y$.

Angenommen, es gibt eine kleinere obere Schranke S von $X + Y$.

Dann ist $S < \sup X + \sup Y$ und $x + y \leq S$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$. Wir setzen $\varepsilon := \sup X + \sup Y - S$. Nach Definition des Supremums sind dann $\sup X - \frac{\varepsilon}{2}$

und $\sup Y - \frac{\varepsilon}{2}$ keine oberen Schranken von X bzw. von Y. Folglich gibt es Elemente $x' \in X$ und $y' \in Y$, so daß $\sup X - \frac{\varepsilon}{2} < x' \leq \sup X$ und $\sup Y - \frac{\varepsilon}{2} < y' \leq \sup Y$; also $S = \sup X + \sup Y - \varepsilon < x' + y'$.
Damit ist S keine obere Schranke von $X + Y$, ↯!

2.12 Berechnen Sie (bzw. zeigen Sie die Nichtexistenz von) Maximum, Minimum, Supremum und Infimum von folgenden Mengen: **12/2/12/1**

(a) $\left\{ r \in \mathbb{Q} \,:\, r > 0 \text{ und } r^2 < 3 \right\}$,

(b) $\left\{ \frac{n}{2^m} \,:\, m, n \in \mathbb{N} \text{ und } n < m \right\}$,

(c) $\left\{ \frac{n}{8^m} \,:\, m, n \in \mathbb{N} \text{ und } n \geq m \right\}$,

(d) $\left\{ \frac{n}{m} \,:\, m, n \in \mathbb{N} \text{ und } n^2 < m \right\}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.12 Es seien $M_a, \ldots, M_d$ die unter (a) - (d) angegebenen Mengen. **12/2/12/2**

(a) $\inf M_a = 0$, $\sup M_a = \sqrt{3}$, $\min M_a$ und $\max M_a$ existieren nicht.

(b) $\inf M_b = 0$, $\sup M_b = \frac{1}{4}$, $\min M_b = 0$, $\max M_b = \frac{1}{4}$.

(c) $\inf M_c = 0$, $\sup M_c$ existiert nicht, $\min M_c = 0$ $\max M_c$ existiert nicht.

(d) $\inf M_d = 0$, $\sup M_d = \frac{1}{2}$, $\min M_d = 0$, $\max M_d = \frac{1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 2.12 Es seien $M_a, \ldots, M_d$ die unter (a) – (d) gegebenen Mengen. **12/2/12/3**

(a) Offenbar ist M_a nicht leer und nach unten durch 0 beschränkt, und es ist z.B. 2 eine obere Schranke von M_a. $\sqrt{3}$ ist die kleinste obere Schranke von M_a (in $\mathbb{R}$).
Denn gäbe es ein $S \in \mathbb{R}$ mit $S < \sqrt{3}$, so daß S ebenfalls eine obere Schranke von M_a ist, dann gibt es aufgrund der Dichtheit der rationalen Zahlen in den reellen ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $S < r < \sqrt{3}$. Folglich ist $S^2 < r^2 < 3$ und $r \in M_a$. Somit ist S keine obere Schranke von M_a und $\sqrt{3}$ die kleinste obere Schranke.
Also $\sup M_a = \sqrt{3}$ und $\inf M_a = 0$.
Wegen $0, \sqrt{3} \notin M_a$ besitzt M_a kein Minimum und kein Maximum.

(b) Wegen $m, n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{n}{2^m} \geq 0$
Für $n = 0$ und m beliebig ist $\frac{n}{2^m} = 0$. Folglich ist $0 = \inf M_b = \min M_b$.
Weiterhin gilt $\frac{1}{2^2} \geq \frac{n}{2^m}$ für alle $0 < n < m$, denn mit $m = n + k$ ist
$2^{n+k} = \underbrace{2^k}_{\geq 2} \cdot \underbrace{2^n}_{\geq 2n} \geq 4$. Folglich ist $\frac{1}{4} = \sup M_b = \max M_b$.

(c) Wegen $m, n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{n}{8^m} \geq 0$.
Für $m = n = 0$ ist $\frac{n}{8^m} = 0$. Folglich ist $0 = \inf M_c = \min M_c$.
Aus $n \geq m$ erhält man sofort, daß M_c nach oben nicht beschränkt ist.
Daher besitzt M_c kein Supremum und kein Maximum.

(d) Offenbar ist $\frac{n}{m} \geq 0$ für alle $\frac{n}{m} \in M_d$ und $0 \in M_d$.
Folglich ist $0 = \inf M_d = \min M_d$.
Für $n = 1$ und $m = 2$ ist $\frac{n}{m} \in M_d$. Wegen $m > n^2 \geq 2n$ für alle $n \geq 2$ ist $\frac{1}{2} \geq \frac{n}{m}$. Somit ist $\frac{1}{2} = \sup M_d = \max M_d$.

2.13 Beweisen Sie oder widerlegen Sie die Behauptung: **12/2/13/1**
Für $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ gilt: $\sup\{x - y : x \in X \text{ und } y \in Y\} = \sup X - \inf Y$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.13 Ist X nicht nach oben und Y nicht nach unten beschränkt, dann gilt die Behauptung nicht, denn dann hat die Menge kein Supremum. Unter der Voraussetzung „X ist nach oben und Y nach unten beschränkt“ gilt die Behauptung. **12/2/13/2**

Lösung zu Aufgabe 2.13 Wir definieren zunächst eine Menge $-Y := \{-y : y \in Y\}$. Damit ist **12/2/13/3**

$\{x - y : x \in X \text{ und } y \in Y\} = X + (-Y)$ (vgl. Aufgabe 2.11).

Wenn X nicht nach oben oder Y nicht nach unten beschränkt ist, dann gilt die Behauptung nicht, denn in diesem Falle ist $X + (-Y)$ nicht nach oben beschränkt, besitzt also kein Supremum.

Unter der Voraussetzung, daß X nach oben und Y nach unten beschränkt ist, beweisen wir die Behauptung.

Wegen der Beschränktheit von Y nach unten ist $-Y$ nach oben beschränkt. Folglich gilt nach Aufgabe 2.11:

$$\sup\{x - y : x \in X \text{ und } y \in Y\} = \sup(X + (-Y)) = \sup X + \sup(-Y).$$

Es genügt also nachzuweisen, daß $\sup(-Y) = -\inf Y$.

Sei $a := \inf Y$, d.h., $a \leq y$ für alle $y \in Y$ und es gibt keine größere Schranke von Y.

Aus $a \leq y$ folgt $-y \leq -a$; somit ist $-a$ eine obere Schranke von $-Y$. Gäbe es eine kleinere obere Schranke $S < -a$ von $-Y$, so wäre $-y \leq S < -a$ für alle $-y \in -Y$, also $a < -S \leq y$. Damit ist a nicht die untere Grenze von Y, ↯!

Schließlich ist $\sup(-Y) = -a = -\inf Y$ und die Behauptung bewiesen.

2.14 Zeigen Sie, daß die Menge $M = \{n \cdot a^n : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \geq 1\}$ beschränkt ist, falls $0 < a < 1$. Berechnen Sie $\inf M$. **12/2/14/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.14 Ist $|a| < 1$ und $\varepsilon > 0$, so ist $n|a|^n < \varepsilon$ für fast alle n; also $\inf Y = 0$. **12/2/14/2**

Lösung zu Aufgabe 2.14 Offenbar ist M durch 0 nach unten beschränkt. **12/2/14/3**

Wir zeigen jetzt, daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $n \cdot a^n < \varepsilon$. Es ist $n \cdot a^n < \varepsilon \iff n < \varepsilon\left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Wegen $0 < a < 1$ ist $1 < \frac{1}{a} := c + 1$ für ein $c > 0$. Nach dem binomischen Satz gilt:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = (c+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c^i \geq 1 + nc + \frac{n(n-1)}{2} \cdot c^2 \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot c^2 .$$

Somit ist

$$\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^n = \varepsilon(c+1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot c^2\varepsilon \quad \text{und}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot c^2\varepsilon > n \iff \frac{2}{c^2\varepsilon} + 1 < n,$$

und dies gilt für alle $n \geq n_0$ von einer Stelle n_0 an.

Damit ist $S = \varepsilon + \max\{n \cdot a^n : n < n_0\}$ eine obere Schranke von M, also ist M nach oben beschränkt und $\inf Y = 0$.

2.15 Zu folgenden Mengen gebe man (im Falle der Existenz) Minimum, Maximum, Infimum und Supremum an! **12/2/15/1**

(a) $M = \{x : \sin x = 0\}$,

(b) $M = \{x : x \in \mathbb{Q} \text{ und } x^2 < \cos 0\}$,

(c) $M = \{y : \text{ es gibt ein } x \text{ mit } \cos x < y\}$,

(d) $M = \{x : x^2 + 10x + 24 \leq 0\}$,

(e) $M = \{y : \text{ es gibt ein } x \text{ mit } (x, y) \in A\}$, wobei
$A = \{(x, y) : x > -1 \text{ und } y > 2x\}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 2.15 Es seien $M_a, \ldots, M_e$ die unter (a) - (e) angegebenen Mengen. **12/2/15/2**

(a) M_a besitzt kein Minimum, Maximum, Infimum, Supremum.

(b) $\inf M_b = -1$, $\sup M_b = 1$, $\min M_b$ und $\max M_b$ existieren nicht.

(c) $\inf M_c = -1$ Minimum, Maximum, Supremum von M_c existieren nicht.

(d) $\inf M_d = -6 = \min M_d$, $\sup M_d = -4 = \max M_d$.

(e) $\inf M_e = -2$, M_e besitzt kein Minimum, Maximum, Supremum.

Lösung zu Aufgabe 2.15 **12/2/15/3**

(a) Offenbar ist $M = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; folglich besitzt M kein Minimum, Maximum, Infimum, Supremum.

(b) Es ist $x^2 < \cos 0 = 1 \iff |x| < 1$; also $M = \{x \in \mathbb{Q} : -1 < x < 1\}$. Folglich ist $\inf M = -1$ und $\sup M = 1$; M besitzt kein Minimum und kein Maximum.

(c) Für $y \leq -1$ existiert kein x mit $\cos x < y \leq -1$.
Sei nun $y > -1$ und $x = \pi$.
Dann ist $\cos x = -1 < y$, also $M = \{y \in \mathbb{R} : y > -1\}$.
Somit ist $\inf M = -1$ und M besitzt kein Minimum, Maximum, Supremum.

(d) Es ist $x^2 + 10x + 24 = (x+4)(x+6) \leq 0 \iff$
$\big(x+4 \leq 0$ und $x+6 \geq 0\big)$ oder $\big(x+4 \geq 0$ und $x+6 \leq 0\big)$.
1. Fall: $x+4 \leq 0$ und $x+6 \geq 0 \iff -6 \leq x \leq -4$.
2. Fall: $x+4 \geq 0$ und $x+6 \leq 0 \iff -4 \leq x \leq -6$;
(diese Ungleichung ist durch kein x erfüllt).
Also $M = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq -4\}$ und somit
$-6 = \inf M = \min M$ und $-4 = \sup M = \max M$.

(e) Sei $y > -2$, also $y = -2 + z$ für ein $z > 0$.
Dann gibt es ein $x > -1$, z.B. $x = -1 + \frac{z}{4}$, so daß $y > 2x = -2 + \frac{z}{2}$.
Folglich ist $(x, y) \in A$ und somit $y \in M$.
Ist $y \leq -2$ und $x > -1$ beliebig, dann gilt stets: $y \leq -2 < 2x$, also $(x, y) \notin A$ und somit $y \notin M$. Damit ist $M = \{y \in \mathbb{R} : y > -2\}$ und $\inf M = -2$.
Offenbar besitzt M kein Supremum, kein Minimum und kein Maximum.

12.3 Folgen von reellen Zahlen

3.1 Geben Sie je eine Folge (a_n) mit den folgenden Eigenschaften an: **12/3/1/1**
(a) (a_n) konvergiert gegen $\frac{1}{2}$,
(b) 3 ist Häufungspunkt von (a_n), aber nicht Grenzwert,
(c) (a_n) hat genau drei Häufungspunkte,
(d) 5 ist Grenzwert, und (a_n) ist nicht monoton,
(e) (a_n) ist nicht beschränkt, und 0 ist Häufungspunkt.

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.1 (a) $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$. **12/3/1/2**

(b) $a_n = \begin{cases} 3, & n \text{ gerade,} \\ 0, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$

(c) $a_n = \begin{cases} 0, & n = 3m, \\ 1, & n = 3m+1, \\ 2, & n = 3m+2, \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(d) $a_n = 5 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

(e) $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$

Lösung zu Aufgabe 3.1 **12/3/1/3**
(a) Wir wählen $a_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}$.

(b) Wir wählen $a_n := \begin{cases} 3, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

(c) Wir wählen $a_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 3m, \\ 1, & \text{falls } n = 3m+1, \\ 2, & \text{falls } n = 3m+2 \quad \text{für ein } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$

(d) Wir wählen $a_n := 5 + \frac{(-1)^n}{n} = \frac{5n + (-1)^n}{n}$.

(e) Wir wählen $a_n := \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade}. \end{cases}$

3.2 Beweisen Sie (ohne Benutzung des Satzes 3.10) die Konvergenz der Folge (a_n) mit $a_n = \frac{5n+3}{3n+4}$. **12/3/2/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.2 Man zeige: $|a_n - \frac{5}{3}| \to 0$. **12/3/2/2**

Lösung zu Aufgabe 3.2 Wir zeigen: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $\left|a_n - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon$. **12/3/2/3**

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig (aber fest); wir bestimmen ein geeignetes n_0.

Es ist

$$\left|a_n - \frac{5}{3}\right| = \left|\frac{3(5n+3) - 5(3n+4)}{3(3n+4)}\right| = \frac{11}{9n+12} < \frac{2}{n}$$

und für ein hinreichend großes n_0 ist $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$.

Somit gilt für alle $n \geq n_0$: $\left|a_n - \frac{5}{3}\right| < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon$.

Folglich ist (a_n) konvergent und zwar gegen $\frac{5}{3}$.

3.3 Zeigen Sie: Zu jeder reellen Zahl a existiert eine Folge (r_n) rationaler Zahlen, die gegen a konvergiert. **12/3/3/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.3 Zu a wähle man rationale Zahlen r, s mit $r < a < s$ und konstruiere eine Intervallschachtelung $([r_n, s_n])$ mit $r_n \leq a \leq s_n$. **12/3/3/2**

Lösung zu Aufgabe 3.3 Offenbar gibt es zu jeder reellen Zahl a rationale Zahlen r_0, s_0, so daß $r_0 \leq a \leq s_0$. **12/3/3/3**

Wir definieren induktiv eine Folge $([r_n, s_n])$ von Intervallen mit $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$, so daß $r_{n-1} \leq r_n \leq a \leq s_n \leq s_{n-1}$ und $s_n - r_n = \frac{1}{2^n}(s_0 - r_0)$.

r_0 und s_0 sind schon gegeben.

Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$ mit den geforderten Eigenschaften.

Wir definieren jetzt $r_{n+1}, s_{n+1} \in \mathbb{Q}$. Dazu sei $c_{n+1} := \frac{r_n + s_n}{2}$.

Wegen $r_n \leq a \leq s_n$ gilt $r_n \leq a \leq c_{n+1}$ oder $c_{n+1} \leq a \leq s_n$.

Wenn $r_n \leq a \leq c_{n+1}$, dann sei $r_{n+1} := r_n$ und $s_{n+1} := c_{n+1}$;
anderenfalls sei $r_{n+1} := c_{n+1}$ und $s_{n+1} := s_n$.

Damit sind $r_{n+1}, s_{n+1} \in \mathbb{Q}$ und es gilt:

$$r_n \le r_{n+1} \le a \le s_{n+1} \le s_n \quad \text{und} \quad s_{n+1} - r_{n+1} = \tfrac{1}{2}(s_n - r_n) = \frac{1}{2^{n+1}(s_0 - r_0)}.$$

Für $n \ge 4$ ist $2^n \ge n^2$ (dies zeigt man leicht induktiv) und somit $\frac{1}{2^n} \le \frac{1}{n^2}$.

Es sei jetzt $\varepsilon > 0$. Für jedes $n \ge 4$ gilt:

$$|r_n - a| = a - r_n \le s_n - r_n = \frac{1}{2^n}(s_0 - r_0) \le \frac{1}{n^2}(s_0 - r_0) \le \frac{1}{n}, \quad \text{falls } n \ge s_0 - r_0.$$

Wir wählen nun $n_0 \ge \max\{4, s_0 - r_0\}$ und n_0 so groß, daß $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Für alle $n \ge n_0$ erhält man damit sofort:

$$|r_n - a| \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

3.4 Zeigen Sie: Wenn $a_n \ge 0$ und $a_n \to a$, so $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$. **12/3/4/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.4 1. Fall: $a = 0$; leicht zu verifizieren. **12/3/4/2**
2. Fall: $a \ne 0$, also $a > 0$. Man benutze:

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \cdot |\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|}.$$

Lösung zu Aufgabe 3.4 Es sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen: $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \varepsilon$ für fast alle n. **12/3/4/3**
1. Fall: $a = 0$; dann ist $|\sqrt{a_n} - \sqrt{0}| = |a_n| < \varepsilon^2$ für fast alle n und somit $|\sqrt{a_n}| < \varepsilon$ für fast alle n, also $\lim \sqrt{a_n} = 0 = \sqrt{a}$.
2. Fall: $a \ne 0$, also $a > 0$ und somit $\sqrt{a} > 0$. Dann ist

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| \cdot |\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}|} = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \le \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$$

für fast alle n. Folglich ist $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

3.5 Zeigen Sie: (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} = 1$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. **12/3/5/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.5 (a) Offenbar ist $\sqrt[n]{5} \ge 1$. Für $\varepsilon > 0$ ist $\sqrt[n]{5} - 1 < \varepsilon$ für fast alle n. **12/3/5/2**

(b) Offenbar ist $\sqrt[n]{n} \ge 1$. Für $\varepsilon > 0$ ist $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$ für fast alle n.

Lösung zu Aufgabe 3.5 Für beliebiges $k > 1$ ist $\sqrt[n]{k} > 1$, denn $\sqrt[n]{k} > 1 \iff k > 1^n = 1$, und dies gilt für alle $n \ge 1$. **12/3/5/3**

(a) Es genügt zu zeigen: Wenn $\varepsilon > 0$, so $\sqrt[n]{5} - 1 < \varepsilon$ für fast alle n.
Angenommen, es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $\sqrt[n]{5} - 1 \ge \varepsilon$ für unendlich viele n.
Dann ist $5 \ge (1 + \varepsilon)^n \ge 1 + n\varepsilon$ für unendlich viele n, $\lightning$! Also $\lim \sqrt[n]{5} = 1$.

(b) Es genügt zu zeigen: Wenn $\varepsilon > 0$, so $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$ für fast alle n.
Angenommen, es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $\sqrt[n]{n} - 1 \geq \varepsilon^2$ für unendlich viele n.
Dann ist $n \geq (1+\varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot \varepsilon^2$ (nach dem binomischen Satz; vgl. Aufgabe 2.14),
also $1 \geq \frac{n-1}{2} \cdot \varepsilon^2$ und somit $\frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \geq n$ für unendlich viele n, $\lightning$!
Also $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

3.6 Zeigen Sie: Für beschränkte Folgen (a_n) von reellen Zahlen sind die nachfolgenden Bedingungen äquivalent: **12/3/6/1**

(a) (a_n) ist konvergent,

(b) (a_n) besitzt genau einen Häufungspunkt,

(c) $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.6 Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen: Konvergenz, Häufungspunkt, Limes Superior, Limes Inferior. **12/3/6/2**

Lösung zu Aufgabe 3.6 (a) $\iff$ (a_n) konvergiert gegen a **12/3/6/3**

$\iff$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für fast alle n (d.h. $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$)

$\iff$ für jedes $\varepsilon > 0$ liegen fast alle Folgeglieder von (a_n) in $U_\varepsilon(a)$

$\iff$ a ist einziger Häufungspunkt von (a_n)

$\iff$ (b).

(b) $\iff$ a ist einziger Häufungspunkt von (a_n)

$\iff$ a ist zugleich größter und kleinster Häufungspunkt von (a_n)

$\iff$ $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$

$\iff$ (c).

3.7 Zeigen Sie, daß die Folge (a_n) mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ streng monoton fällt. **12/3/7/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.7 Man zeige $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ für alle n und benutze dabei die Bernoullische Ungleichung. **12/3/7/2**

Lösung zu Aufgabe 3.7 Wir zeigen $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ für alle n. **12/3/7/3**

Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
&\geq \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} \quad \text{(nach der Bernoullischen Ungleichung)} \\
&= \frac{n(n+2)+n+1}{n(n+2)} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.
\end{aligned}$$

3.8 Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte der Folgen **12/3/8/1**

(a) $\left(\frac{2^n}{n!}\right)$, (c) $\left(\frac{4n^3+2n^2+7}{7n^3+n^2+n-1}\right)$, (e) $\left((-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2}\right)$,

(b) $\left(\frac{n!}{k^n}\right)$, $k \geq 1$, (d) $\left(\frac{n^3+\sqrt{n^3+1}}{3n^2+\sqrt{n^2-1}}\right)$, (f) $\left(\sqrt[n]{2n}\right)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.8 (a) $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$. **12/3/8/2**

(b) $\lim \frac{n!}{k^n} = \infty$.

(c) $\lim \frac{4n^3+2n^2+7}{7n^3+n^2+n-1} = \frac{4}{7}$.

(d) $\lim \frac{n^3+\sqrt{n^3+1}}{3n^2+\sqrt{n^2-1}} = \infty$.

(e) $\lim (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2} = 0$.

(f) $\lim \sqrt[n]{2n} = 1$.

Lösung zu Aufgabe 3.8 **12/3/8/3**

(a) Wir zeigen: $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$.

Offenbar ist $\frac{2^n}{n!} > 0$. Weiterhin gilt für $n \geq 4$:

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2^4}{4!} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdots \frac{2}{n} < \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{n} < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Folglich gilt die Behauptung.

(b) Wir zeigen: $\lim \frac{n!}{k^n} = \infty$ für $k \geq 1$.

Es sei $n > k$ und $\frac{k!}{k^k} := c$. Dann ist $\frac{k+1}{k} \cdots \frac{n-1}{k} \geq 1$ und somit

$$\frac{n!}{k^n} = \frac{k!}{k^k} \cdot \frac{k+1}{k} \cdots \frac{n-1}{k} \cdot \frac{n}{k} \geq \frac{c}{k} \cdot n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Folglich gilt die Behauptung.

(c) Es sei $a_n = \frac{4n^3+2n^2+7}{7n^3+n^2+n-1}$. Wir zeigen $\lim a_n = \frac{4}{7}$.

Es ist $a_n = \frac{4+\frac{2}{n}+\frac{7}{n^3}}{7+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}$ und daher $\lim a_n = \frac{4}{7}$.

(d) Es sei $a_n = \frac{n^3+\sqrt{n^3+1}}{3n^2+\sqrt{n^2-1}}$. Wir zeigen $\lim a_n = \infty$. Es ist

$$a_n > \frac{n^3}{3n^2+\sqrt{n^2-1}} > \frac{n^3}{4n^2} = \frac{n}{4} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

denn $\sqrt{n^2-1} < n^2$.

(e) Sei $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2}$. Wir zeigen: $\lim a_n = 0$. Es ist

$$|a_n| = \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

also $\lim a_n = 0$.

(f) Es ist $\sqrt[n]{2n} > 1$, denn $2n > 1$. Es genügt zu zeigen:
Wenn $\varepsilon > 0$, so $\sqrt[n]{2n} - 1 < \varepsilon$ für fast alle n.
Angenommen, es existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $\sqrt[n]{2n} - 1 \geq \varepsilon$, also

$$2n \geq (1+\varepsilon)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot \varepsilon^2 \quad \text{für unendlich viele } n$$

(hier wurde der binomische Satz benutzt).
Dann ist $2 \geq \frac{n-1}{2} \cdot \varepsilon^2$ und somit $\frac{4}{\varepsilon^2} + 1 \geq n$ für unendlich viele n, ↯!
Also $\lim \sqrt[n]{2n} = 1$.

3.9 Zeigen Sie: Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) beschränkt, dann ist $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge. **12/3/9/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.9 $|b_n| \leq c \implies |a_n b_n| \leq c|a_n| \to 0$. **12/3/9/2**

Lösung zu Aufgabe 3.9 Nach Voraussetzung gilt: $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, und es existiert eine Konstante c, so daß **12/3/9/3**
$|b_n| \leq c$ für alle n. Folglich ist

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq c|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

und somit $\lim a_n b_n = 0$.

3.10 Prüfen Sie, ob die Folgen (a_n), $n \geq 1$, beschränkt sind: **12/3/10/1**

(a) $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}$ (n Wurzeln),

(b) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n+1}$,

(c) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } n = 2k, \\ \frac{n^2}{n+2} & \text{für } n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.10 (a) Induktiv zeigt man: $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ und $0 \leq a_n \leq 2$. **12/3/10/2**
(a_n) ist also nach oben beschränkt.

(b) $a_n \geq \sqrt{n+1}$, und somit ist (a_n) nach unten, aber nicht nach oben beschränkt.

(c) (a_n) ist nach unten, aber nicht nach oben beschränkt.

Lösung zu Aufgabe 3.10 **12/3/10/3**

(a) Offenbar ist $a_n \geq 1$, folglich ist (a_n) nach unten beschränkt.
Wir zeigen: $a_n \leq 2$ für alle n.
Nach Definition von a_n ist $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
Induktiv beweist man sehr leicht, daß mit $a_n \leq 2$ auch $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq 2$ ist.
Damit ist (a_n) auch nach oben beschränkt.

(b) Für $n \geq 4$ ist
$$a_n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1} = \sqrt{n+1}(\sqrt{n} - 1) \geq \sqrt{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$
Folglich ist (a_n) nicht nach oben beschränkt.
Wegen $a_n \geq \sqrt{n+1} \geq 1$ ist (a_n) jedoch nach unten beschränkt.

(c) Für gerade n ist $0 \leq \frac{1}{n} < 1$; für ungerade $n \geq 3$ ist
$$0 \leq a_n = \frac{n^2}{n+1} > \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$
Folglich ist (a_n) nach unten, aber nicht nach oben beschränkt.

3.11 Prüfen Sie, ob die Folgen (a_n), $n \geq 1$, monoton sind: **12/3/11/1**

(a) $a_n = \dfrac{n^2 + 2n + 7}{n^2 + 2n + 8}$,

(b) $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt{n}$,

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$,

(d) $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - 1} & \text{für} \quad n = 2k - 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + 1} & \text{für} \quad n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.11 (a) (a_n) ist streng monoton wachsend. **12/3/11/2**

(b) (a_n) ist streng monoton fallend.

(c) (a_n) ist alternierend und daher nicht monoton.

(d) (a_n) ist nicht monoton, denn $a_n > a_{n+1} < a_{n+2}$.

Lösung zu Aufgabe 3.11 **12/3/11/3**

(a) (a_n) ist streng monoton wachsend, denn
$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\iff (n^2 + 2n + 7)\big((n+1)^2 + 2(n+1) + 8\big) < (n^2 + 2n + 8)\big((n+1)^2 + 2(n+1) + 7\big) \\ &\iff 0 < 2n + 3; \text{ und dies gilt.} \end{aligned}$$

(b) (a_n) ist streng monoton fallend, denn
$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\iff (n+2)^{\frac{1}{3}} - (n+1)^{\frac{1}{2}} < (n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{2}} \\ &\iff (n+2)^{\frac{2}{6}} - (n+1)^{\frac{3}{6}} < (n+1)^{\frac{2}{6}} - n^{\frac{3}{6}} \\ &\iff (n+2)^{\frac{2}{6}} - (n+1)^{\frac{2}{6}} < (n+1)^{\frac{3}{6}} - n^{\frac{3}{6}} \end{aligned}$$

$$\iff (n+1)^{\frac{2}{6}} \cdot \left(\left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{\frac{2}{6}} - 1 \right) < n^{\frac{3}{6}} \cdot \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{3}{6}} - 1 \right).$$

Die letzte Ungleichung wird abkürzend mit $(\star)$ bezeichnet.
Für $n < 3$ gilt offenbar $a_{n+1} < a_n$.
Weiterhin ist $0 < (n+1)^{\frac{2}{6}} < n^{\frac{3}{6}}$ für alle $n \geq 3$, denn

$$(n+1)^{\frac{2}{6}} < n^{\frac{3}{6}} \iff (n+1)^2 < n^3. \quad \text{(Diese Ungleichung gilt für } n \geq 3.\text{)}$$

Um die Ungleichung $(\star)$ nachzuweisen, bleibt noch zu zeigen, daß auch

$(\star\star)$: $\left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{\frac{2}{6}} - 1 < \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{3}{6}} - 1$ gilt. (Beide Seiten von $(\star\star)$ sind positiv!)

Es ist

$$(\star\star) \iff \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^2 < \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 \iff (n+2)^2 \cdot n^3 < (n+1)^5$$

$$\iff n^5 + 4n^4 + 4n^3 < \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} n^{5-i}; \quad \text{und diese Ungleichung ist richtig.}$$

Folglich gilt auch $(\star)$ und somit die Ausgangsungleichung.

(c) Für $n \geq 2$ ist $n < n^2$, also auch $\sqrt{n} < n$ und somit $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$;
folglich ist $-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.
Hieraus folgt: (a_n) ist alternierend und daher nicht monoton.

(d) Wir zeigen: (a_n) ist nicht monoton. Dazu weisen wir nach, daß
$a_n > a_{n+1} < a_{n+2}$.
Es sei $n = 2k-1$, also n ungerade. Dann gilt:

$$a_n > a_{n+1} \iff \frac{1}{\sqrt{2k}-1} > \frac{1}{\sqrt{2k+1}+1} \iff \sqrt{2k} - 1 < \sqrt{2k+1} + 1;$$

und die letzte Ungleichung ist offensichtlich richtig.
Also $a_n > a_{n+1}$. Weiterhin ist

$$a_{n+1} < a_{n+2} \iff \frac{1}{\sqrt{2k+1}+1} < \frac{1}{\sqrt{2k+2}-1} \iff \sqrt{2k+1} + 1 > \sqrt{2k+2} - 1$$

$$\iff \sqrt{2k+1} + 2 > \sqrt{2k+2} \iff 2k + 1 + 4\sqrt{2k+1} + 4 > 2k + 2$$

$$\iff 4\sqrt{2k+1} + 3 > 0.$$

Also $a_{n+1} < a_{n+2}$.

3.12 Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Kriteriums die Konvergenz der Folgen: **12/3/12/1**
(a) $\left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)$, (b) $\left(\frac{n+b}{n} \right)$, (c) $\left(\frac{1}{n^p} \right)$, $p \geq 1$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.12 Sei a_n das jeweils n-te Folgeglied und $m > n$. **12/3/12/2**
Dann gilt:

(a) $|a_m - a_n| < \frac{1}{n}$.

(b) $|a_m - a_n| < \frac{2 \cdot |b|}{n}$.

(c) $|a_m - a_n| < \frac{2}{n}$.

Lösung zu Aufgabe 3.12 Im Folgenden sei $\varepsilon > 0$ und $m > n$ beliebig. **12/3/12/3**

(a) Für $a_n := \frac{n^2-1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2}$ gilt:

$|a_m - a_n| = \left|1 - \frac{1}{m^2} - 1 + \frac{1}{n^2}\right| \le \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n^2} < \frac{1}{n} < \varepsilon$ für hinreichend große n.

(b) Für $a_n := \frac{n+b}{n} = 1 + \frac{b}{n}$ gilt:

$|a_m - a_n| = \left|\frac{b}{m} - \frac{b}{n}\right| \le \frac{|b|}{m} + \frac{|b|}{n} < \frac{2|b|}{n} < \varepsilon$ für hinreichend große n.

(c) Für $a_n := \frac{1}{n^p}$, $p \ge 1$ gilt:

$|a_m - a_n| = \left|\frac{1}{m^p} - \frac{1}{n^p}\right| \le \frac{1}{m^p} + \frac{1}{n^p} < \frac{2}{n^p} < \frac{2}{n} < \varepsilon$ für hinreichend große n.

3.13 Geben Sie für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ entsprechend der Definition der Konvergenz von (a_n) ein a und ein geeignetes $n_0 = n_0(\varepsilon)$ an, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$ für: **12/3/13/1**

(a) $a_n = \frac{n^2+1}{n^2}$, (b) $a_n = \frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}$, (c) $a_n = \frac{5n^3-3n^2}{n^3+1}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.13 (a) $a_n \to 1$; $n_0 = 4$. **12/3/13/2**

(b) $a_n \to 2$; $n_0 = 101$.

(c) $a_n \to 5$; $n_0 = 31$.

Lösung zu Aufgabe 3.13 **12/3/13/3**

(a) Wir vermuten: $a_n \to 1$.

Es ist $|a_n - 1| = \left|1 - \frac{1}{n^2} - 1\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon = \frac{1}{10}$, falls $n_0 = 4$ und $n \ge n_0$.

(b) Wir vermuten: $a_n \to 2$.

Es ist $|a_n - 2| = \left|2 - \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon = \frac{1}{10}$, falls $n_0 = 101$ und $n \ge n_0$.

(c) Wir vermuten: $a_n \to 5$.

Es ist $|a_n - 5| = \left|\frac{5n^3-3n^2}{n^3+1} - 5\right| = \frac{3n^2+5}{n^3+1} < \frac{3n^2+5}{n^3} = \frac{3}{n} + \frac{5}{n^3} < \varepsilon = \frac{1}{10}$,
falls $n_0 = 31$ und $n \ge n_0$.

3.14 Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für **12/3/14/1**

(a) $a_n = \frac{9 + \frac{n}{n+1}}{2 + \frac{1}{n}}$, (b) $a_n = \frac{n}{3n+2}$, (c) $a_n = \frac{3 + 0,5^n}{0,3^{n+1} + 5}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.14 (a) $\lim a_n = 5$. **12/3/14/2**

(b) $\lim a_n = \frac{1}{3}$.

(c) $\lim a_n = \frac{3}{5}$.

Lösung zu Aufgabe 3.14 **12/3/14/3**

(a) $\lim a_n = \dfrac{9 + \lim \frac{n}{n+1}}{2 + \lim \frac{1}{n}} = \dfrac{9+1}{2} = 5.$

(b) Es ist $a_n = \dfrac{n}{3n+2} = \dfrac{1}{3 + \frac{2}{n}}$; folglich ist $\lim a_n = \dfrac{1}{3 + \lim \frac{2}{n}} = \frac{1}{3}.$

(c) $\lim a_n = \dfrac{3 + \lim 0{,}5^n}{5 + \lim 0{,}3^{n+1}} = \frac{3}{5}.$

3.15 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren): **12/3/15/1**

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n+1}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.15 (a) $\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n+1} = \mathrm{e} \cdot \sqrt{\mathrm{e}}$. **12/3/15/2**

(b) $\lim \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2} = \mathrm{e}$.

Lösung zu Aufgabe 3.15 **12/3/15/3**

(a) Es sei $2n = m$; dann ist

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n+1} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m\cdot\frac{3}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Wegen $n \to \infty$ gilt auch $m \to \infty$, folglich ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m\cdot\frac{3}{2}} \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} \cdot 1 = \mathrm{e} \cdot \sqrt{\mathrm{e}}.$$

(b) Es sei $n^2 + 1 = m$; dann ist

$$a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m-1}.$$

Wegen $n \to \infty$ gilt auch $m \to \infty$; folglich ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} \cdot \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{m}} = \mathrm{e}.$$

3.16 Man finde die Grenzwerte von (a_n) und (b_n), wobei a_n und b_n durch die folgenden Rekursionen definiert sind: **12/3/16/1**

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}; \qquad b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2 - b_n}.$$

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.16 (a) Induktiv zeigt man: $a_n = \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$; also $\lim a_n = 1$. **12/3/16/2**

(b) Induktiv zeigt man: $b_n = \dfrac{n}{n+1}$; also $\lim b_n = 1$.

Lösung zu Aufgabe 3.16 **12/3/16/3**

(a) Wir behaupten: $a_n = \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}} = 1 + \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
Dies wird induktiv über n bewiesen.
Für $n = 1$ ist $a_1 = 1 + \frac{1}{2^0} = 2$.
Für n gelte die Behauptung bereits. Es ist
$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2} = \frac{\frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}} + 1}{2} = \frac{2^{n-1} + 1 + 2^{n-1}}{2 \cdot 2^{n-1}} = \frac{2^n + 1}{2^n}.$$
Folglich ist $\lim a_n = 1 + \lim \frac{1}{2^n} = 1$.

(b) Wir behaupten: $b_n = \dfrac{n}{n+1}$. Dies wird induktiv über n gezeigt.
Für $n = 1$ ist $b_n = \frac{1}{2}$.
Für n gelte die Behauptung bereits. Es ist
$$b_{n+1} = \frac{1}{2 - b_n} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{2n + 2 - n} = \frac{n+1}{n+2}.$$
Folglich ist $\lim b_n = \lim \dfrac{n}{n+1} = 1$.

3.17 Zeigen Sie: **12/3/17/1**

(a) Die Folge (a_n) mit den induktiv definierten Folgegliedern
$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) \quad \text{für } n \geq 2$$
ist eine Cauchyfolge.

(b) Ist (a_n) induktiv definiert durch
$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \tfrac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für } n \geq 3,$$
dann besitzt die Folge (a_n) den Grenzwert $\frac{2}{3}$.
[Hinweis: $a_n - \frac{2}{3} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3}$ für $n \geq 1$.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 3.17 (a) Induktiv zeigt man: **12/3/17/2**

Wenn $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ und $n \in \{4k + i : i = 0, \ldots, 3\}$, so $|a_n| \leq \frac{1}{2^k}$.
Hieraus folgt die Behauptung.

(b) Induktiv zeigt man: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}$ (für $n \geq 2$); damit ist $\lim a_n = \frac{2}{3}$.

Lösung zu Aufgabe 3.17 **12/3/17/3**

(a) Die Gestalt des n-ten Folgegliedes ist nicht offensichtlich. Daher wird eine Abschätzung der Folgeglieder vorgenommen; insbesondere weisen wir nach, daß (a_n) eine Nullfolge bildet. Dazu beweisen wir die folgende Behauptung:

Wenn $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ *und* $n \in \{4k + i : i = 0, \ldots, 3\}$, *so ist* $|a_n| \leq \frac{1}{2^k}$.

Für beliebiges $n \geq 2$ gilt: $|a_{n+4}| = -\frac{1}{8}(a_{n+1} - a_{n-1})$, $\quad (\star)$

denn nach Definition der Folgeglieder ist

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= \tfrac{1}{2}(a_{n+3} - a_{n+2}) = \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{2}(a_{n+2} - a_{n+1}) - a_{n+2}\Big) \\ &= -\tfrac{1}{4}(a_{n+2} + a_{n+1}) \\ &= -\tfrac{1}{4}\Big(\tfrac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) + \tfrac{1}{2}(a_n - a_{n-1})\Big) \\ &= -\tfrac{1}{8}(a_{n+1} - a_{n-1}). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von $(\star)$ wird jetzt die obige Behauptung induktiv über k bewiesen.

Es sei $k = 1$. $\quad$ (Zu zeigen ist: $|a_{4+i}| \leq \frac{1}{2}$ für $i = 0, \ldots, 3$.)

$$\begin{aligned} &a_3 = \tfrac{1}{2}(a_2 - a_1) = \tfrac{1}{2}; \\ &a_4 = \tfrac{1}{2}(a_3 - a_2) = -\tfrac{1}{4}; \qquad a_5 = \tfrac{1}{2}(a_4 - a_3) = -\tfrac{3}{8}; \\ &a_6 = \tfrac{1}{2}(a_5 - a_4) = -\tfrac{1}{16}; \qquad a_7 = \tfrac{1}{2}(a_6 - a_5) = \tfrac{5}{32}; \end{aligned}$$

Also $|a_{4+i}| \leq \frac{1}{2^1}$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Induktionsvoraussetzung für k:

Wenn $1 \leq m \leq k$ und $n \in \{4m + i : i = 0, \ldots, 3\}$, so gilt: $|a_n| \leq \frac{1}{2^m}$.

Wir zeigen die Behauptung für $k + 1$. Sei $n \in \{4(k+1) + i : i = 0, \ldots, 3\}$.

1. Fall: $n = 4k + 4$.

Nach $(\star)$ und der Dreiecksungleichung erhält man:

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_{4k+4}| \leq \tfrac{1}{8}(|a_{4k+1}| + |a_{4k-1}|) \\ &\leq \tfrac{1}{8}\big(\tfrac{1}{2^k} + \tfrac{1}{2^{k-1}}\big) \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &\leq \tfrac{1}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

2. Fall: $n = 4k + 4 + i$, $i = 1, 2, 3$. Dann gilt analog wie im ersten Fall:

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_{4k+4+1}| \leq \tfrac{1}{8}(|a_{4k+1+i}| + |a_{4k-1+i}|) \\ &\leq \tfrac{1}{8}\big(\tfrac{1}{2^k} + \tfrac{1}{2^k}\big) \quad (\text{denn } 4k - 1 + i \geq 4k\,) \\ &= \tfrac{1}{2^{k+2}} \leq \tfrac{1}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Folglich ist (a_n) eine Nullfolge.

(Hieraus folgt bereits, daß (a_n) eine Cauchyfolge ist, wenn man den Satz zur Verfügung hat, daß konvergente Folgen stets Cauchyfolgen sind.)

Wir zeigen die „Cauchy-Eigenschaft“ mit Hilfe der Definition.

Dazu sei $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Weiterhin sei $n_0 := 2^k$ und $n \geq n_0$ beliebig. Dann gilt offenbar:

$$|a_n - a_{n_0}| \leq |a_n| + |a_{n_0}| \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

(b) Dem Hinweis entsprechend zeigen wir induktiv über n $(n \geq 2)$:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}.$$

Sei $n = 2$; dann ist $\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 1 = a_2$.

Für ein $n \geq 2$ gelte die Behauptung bereits; wir zeigen sie für $n+1$.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \tfrac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} \cdot \frac{2}{3}\Big) + \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} \cdot \frac{2}{3}\Big(\frac{-1}{2} + 1\Big) + \frac{2}{3} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $(a_n - \frac{2}{3})$ eine Nullfolge, also $a_n \to \frac{2}{3}$.

12.4 Unendliche Reihen

4.1 Man beweise: Für alle reellen Zahlen a, b und alle natürlichen Zahlen n gilt: **12/4/1/1**

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}.$$

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.1 Den Beweis führt man leicht induktiv über n. **12/4/1/2**

Lösung zu Aufgabe 4.1 Der Beweis erfolgt induktiv über n. **12/4/1/3**

Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial.

Für n gelte die Formel bereits; wir beweisen sie für $n+1$.

Es ist

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \\
&= \qquad\qquad \binom{n}{0} ab^n + \binom{n}{1} a^2 b^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^n b + \binom{n}{n} a^{n+1} + \\
&\quad \binom{n}{0} b^{n+1} + \binom{n}{1} ab^n + \binom{n}{2} a^2 b^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} a^n b \\
&= \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right) ab^n + \ldots + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right) a^n b + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}, \quad \text{denn} \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{k+1}{k}.
\end{aligned}$$

4.2 Man berechne $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ und $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}$. **12/4/2/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.2 (a) Für $a = b = 1$ in Aufgabe 4.1 entsteht $2^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$. **12/4/2/2**

(b) Für $a = -1$ und $b = 1$ in Aufgabe 4.1 erhält man $0 = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i}$.

Lösung zu Aufgabe 4.2 Der Beweis erfolgt mit Hilfe des binomischen Satzes (vgl. Aufgabe 4.1). **12/4/2/3**

(a) Setzt man dort $a = b = 1$, so gilt:

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^i 1^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}; \quad \text{also} \quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

(b) Für $a = -1$ und $b = 1$ gilt:

$$(-1+1)^n = 0 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i 1^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}; \quad \text{also} \quad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$

4.3 Zeigen Sie: $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} = 2^{2n}$. **12/4/3/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.3 Man benutze die Ergebnisse von Aufgabe 4.2 . **12/4/3/2**

Lösung zu Aufgabe 4.3 Es ist $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ und $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{i} = 0$ (vgl. Aufgabe 4.2). **12/4/3/3**

Folglich gilt nach dem binomischen Satz:

$$\begin{aligned}
(1+1)^{2n} + (-1+1)^{2n} &= 2^{2n} + 0 = 2^{2n} \\
&= \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} + \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{2n} \Big(1 + (-1)^n\Big) \binom{2n}{i} \\
&= \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{2j}. \qquad \text{(für ungerade } i \text{ ist } 1 + (-1)^i = 0)
\end{aligned}$$

Also $\sum\limits_{i=0}^{2n} \binom{2n}{2i} = 2^{2n}$.

4.4 Man berechne $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$. **12/4/4/1**

[Hinweis: $\dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}$; (wichtige Zerlegung; bitte einprägen !)]

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.4 Induktiv über n zeigt man: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$. **12/4/4/2**

Lösung zu Aufgabe 4.4 Aufgrund des Hinweises entsteht die Behauptung: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ **12/4/4/3**
(die induktiv bewiesen wird).

Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial.

Wir setzten jetzt die Gültigkeit der Behauptung für n voraus und zeigen sie für $n+1$.

Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

4.5 Ermitteln Sie die n-te Partialsumme und den Grenzwert der Reihe **12/4/5/1**

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}.$$

[Hinweis: Man ermittle Zahlen a, b, c, so daß gilt: $\dfrac{1}{i(i+1)(i+2)} = \dfrac{a}{i} + \dfrac{b}{i+1} + \dfrac{c}{i+2}$.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.5 Es ist $a = \frac{1}{2},\ b = -1,\ c = \frac{1}{2}$. Die n-te Partialsumme S_n ist gegeben durch $S_n = \frac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$. Hieraus erhält man $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{4}$. **12/4/5/2**

Lösung zu Aufgabe 4.5 Entsprechend des Hinweises erhält man die Gleichung: **12/4/5/3**

$$1 = a(i^2 + 3i + 2) + b(i^2 + 2i) + c(i^2 + i) = (a + b + c) \cdot i^2 + (3a + 2b + c) \cdot i + 2a,$$

die für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq 1$ gelten soll. Hieraus entsteht das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & c & = & 0 \\ 3a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ 2a & & & & & = & 1 \end{array}$$

dessen Lösung $a = \frac{1}{2},\ b = -1,\ c = \frac{1}{2}$ ergibt. (Probe!)

Folglich gilt für die n-te Partialsumme S_n der Reihe:

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1} + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+2}\\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i+1} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1} + \tfrac{1}{2}\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i+1}\\
&= \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{i+1} - \tfrac{1}{2} - \sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{i+1} - \frac{1}{n+1} + \tfrac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{i+1} + \tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\Big)\\
&= \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\Big)\\
&= \tfrac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}
$$

Also $\quad S_n = \tfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}.$

Folglich gilt: $\quad \lim S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \tfrac{1}{4}.$

4.6 Es sei (a_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. **12/4/6/1**

Beweisen Sie, daß $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^{-n}$ konvergiert.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.6 Für $|a_n| \leq c,\ n \in \mathbb{N},$ ist $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{c}{2^n}$ eine konvergente Majorante von $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n.$ **12/4/6/2**

Lösung zu Aufgabe 4.6 Nach dem Majorantenkriterium gilt: Sind (b_n), (c_n) Folgen und ist $|b_n| \leq |c_n|$ für fast alle n und ist $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$ konvergent, dann ist auch $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|$ konvergent und somit ebenfalls $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent. **12/4/6/3**

Aufgrund der Voraussetzung ist (a_n) beschränkt, also $|a_n| \leq c$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist $|a_n 2^{-n}| \leq \frac{c}{2^n}$. Die m-te Partialsumme S_m von $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{2^n}$ ist $S_m = 2\cdot\Big(1 - \big(\tfrac{1}{2}\big)^{m+1}\Big) = 2 - \frac{1}{2^m}$ (vgl. Aufgabe 1.16) und somit ist

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{c}{2^n} = c \cdot S_m = 2c - \frac{c}{2^m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 2c.$$

Folglich ist $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^{-n}$ konvergent.

4.7 Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten folgender Reihen: **12/4/7/1**

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ mit $a > 1$,

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{(n+1)3^n}$, (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k \cdot a^n$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $0 < a < 1$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.7 Es seien $a_n, \ldots, d_n$ die jeweils n-ten Summanden der Reihen (a) - (d). **12/4/7/2**

(a) Es ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \to \frac{2}{\mathrm{e}} < 1$. Nach dem Quotientenkriterium ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

(b) Für $a := 1 + c$ und $c > 0$ ist $b_n \geq \frac{n(n-1)}{n+1} \cdot \frac{c^2}{2} \to \infty$. Die Folge (b_n) ist nicht beschränkt und $\sum b_n$ nicht konvergent.

(c) $|\frac{c_{n+1}}{c_n}| \leq \frac{3}{4}$ für $n \geq 2$. Nach dem Quotientenkriterium ist $\sum c_n$ absolut konvergent.

(d) $|\frac{d_{n+1}}{d_n}| \leq a < 1$; folglich ist $\sum d_n$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent.

Lösung zu Aufgabe 4.7 **12/4/7/3**

(a) Wir benutzen das Quotientenkriterium.
Es sei $\frac{2^n n!}{n^n} := a_n$; dann gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot n!} = 2\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n = \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{\mathrm{e}} < 1.$$

Folglich ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

(b) Es sei $\frac{a^n}{\sqrt{n(n+1)}} := b_n$.
Wegen $a > 1$ gibt es ein $c > 0$, so daß $a = c + 1$. Mit Hilfe des binomischen Satzes erhält man schließlich:

$$\frac{a^n}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{a^n}{n+1} = \frac{(c+1)^n}{n+1} \geq \frac{n(n-1)}{n+1} \cdot \frac{c^2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Folglich ist (b_n) nicht beschränkt, also keine Nullfolge und daher $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ nicht konvergent.

(c) Es sei $\frac{2n^2}{(n+1)3^n} := c_n$ und $q := \frac{3}{4}$. Für alle $n \geq 2$ gilt dann:

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{2(n+1)^2 \cdot (n+1) \cdot 3^n}{(n+2) \cdot 3^{n+1} \cdot 2n^2} = \frac{(n+1)^3}{3(n+2)n^2}$$
$$\leq \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^3}{(n+1)n^2} = \frac{1}{3} \cdot \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2 \leq \frac{3}{4} = q < 1.$$

Somit ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent.

(d) Wir benutzen abermals das Quotientenkriterium.
Es sei $n^k a^n := d_n$. Dann gilt:

$$\left|\frac{d_{n+1}}{d_n}\right| = \frac{(n+1)^k \cdot a^{n+1}}{n^k \cdot a^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot a := (\star).$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n}) = 1$ gilt auch $\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = \left(\lim(1 + \frac{1}{n})\right)^k = 1$.

Folglich ist $\lim\left|\frac{d_{n+1}}{d_n}\right| = \lim(\star) = a < 1$ und somit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ konvergent.

4.8 Zeigen Sie, daß **12/4/8/1**

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$; $\quad$ [Hinweis: $S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$].

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 3$; $\quad$ [Hinweis: $S_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$].

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.8 Es seien a_n, b_n, c_n die jeweils n-ten Summanden der Reihen (a) - (c). **12/4/8/2**

(a) Es ist $a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$ und die n-te Partialsumme $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+3)}$, also $\sum a_n = \frac{1}{2}$.

(b) Für $S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$ (induktiv zu beweisen) gilt offenbar: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{i}{3^i} = \frac{3}{4}$.

(c) Für $S_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$ (induktiv zu beweisen) gilt offenbar: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{2i-1}{2^i} = 3$.

Lösung zu Aufgabe 4.8 **12/4/8/3**

(a) Es sei $a_n := \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$. Dann ist $a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$ und somit ist die n-te Partialsumme S_n von $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\Big(\Big(1 - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\Big) + \ldots + \Big(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2i+3}\Big) + \Big(\frac{1}{2i+3} - \frac{1}{2i+5}\Big) \\ &\qquad + \ldots + \Big(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\Big(1 - \frac{1}{2n+3}\Big) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Folglich gilt: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

(b) Induktiv über n zeigt man, daß die n-te Partialsumme S_n von $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{3^i}$ durch $S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$ dargestellt wird.

Für $n = 1$ ist dies offenbar richtig.

Unter der Voraussetzung, daß die Darstellung von S_n korrekt ist, zeigen wir:

$$S_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{2(n+1)+3}{4 \cdot 3^{n+1}}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{3^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{3^i} + \frac{n+1}{3^{n+1}} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2(n+1)+3}{4 \cdot 3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\left| - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} \right| = \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} \le \frac{n+1}{3^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Folglich gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{3}{4}.$

(c) Induktiv über n zeigt man, daß die n-te Partialsumme S_n von $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i-1}{2^i}$ durch $S_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$ gegeben ist.

Für $n = 1$ ist dies offenbar richtig.

Unter der Voraussetzung, daß die Darstellung von S_n korrekt ist, zeigen wir:

$$S_{n+1} = 3 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2i-1}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i+1}{2^i} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} \\ &= 3 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}} \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= 3 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\left| - \frac{2n+3}{2^n} \right| \le \frac{2(n+2)}{2^n} = \frac{n+2}{2^{n-1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Folglich gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \lim_{n \to \infty} S_n = 3.$

4.9 Es sei $a_n > 0$ für jedes $n \ge 0$, und es sei (a_n) konvergent gegen a oder bestimmt divergent gegen ∞. **12/4/9/1**

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n} \right)^n$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.9 1.Fall: $a_n \to \infty$. Dann ist $\sqrt[n]{|\frac{x}{a_n}|^n} \leq \frac{1}{2}$ für fast alle n. **12/4/9/2**
Die Reihe ist für alle x absolut konvergent.
2. Fall: $a_n \to a$. Mit Hilfe des Wurzelkriteriums erhält man:
Für $|x| < a$ ist die Reihe absolut konvergent, für $|x| > a$ divergent.

Lösung zu Aufgabe 4.9 Es sei zunächst $x = 0$; dann ist die Reihe offenbar konvergent. **12/4/9/3**
Sei jetzt $x \neq 0$, ansonsten x beliebig, aber fest.

1. Fall: $a_n \longrightarrow \infty$.

Nach Voraussetzung existiert ein n_0, so daß für jedes $n \geq n_0$ gilt: $|a_n| \geq 2|x|$.
Wir wenden das Wurzelkriterium an. Es ist

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x}{a_n}\right|^n} = \frac{|x|}{|a_n|} \leq \frac{|x|}{2|x|} := q < 1 \quad \text{für fast alle } n.$$

Folglich ist die Reihe (absolut) konvergent für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

2. Fall: $a_n \longrightarrow a$.

Wir wenden abermals das Wurzelkriterium an:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x}{a_n}\right|^n} = \frac{|x|}{|a_n|} := (\star)$$

Ist $|x| < |a|$; $|x| + \varepsilon = |a|$ für ein $\varepsilon > 0$, dann gilt wegen $a_n \longrightarrow a$ auch $|a_n| \longrightarrow |a|$ und somit $|a_n| > |x| + \frac{\varepsilon}{2}$ für fast alle n. Also

$$(\star) = \frac{|x|}{|a_n|} < \frac{|x|}{|x| + \frac{\varepsilon}{2}} := q < 1 \quad \text{für fast alle } n.$$

Für $|x| < |a|$ ist die Reihe also (absolut) konvergent.
Sei jetzt $|x| > |a|$; $|x| - \varepsilon = |a|$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann ist $|x| - \frac{\varepsilon}{2} \geq |a_n|$ für fast alle n, also

$$(\star) \geq \frac{|x|}{|x| - \frac{\varepsilon}{2}} > 1 \quad \text{für fast alle } n.$$

Folglich ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n}\right)^n$ für $|x| > |a|$ nicht konvergent.

(Bemerkung: Die Untersuchungen zeigen, daß in der Voraussetzung „$a_n > 0$“ bzw. „(a_n) divergiert bestimmt gegen ∞“ durch „$|a_n| > 0$“ bzw. „$(|a_n|)$ divergiert bestimmt gegen ∞“ ersetzt werden kann.)

4.10 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz: **12/4/10/1**

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n-1}$, (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(8n+9)^2}$, (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ für $s \in \mathbb{Q}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.10 Es seien $a_n, \dots, e_n$ die n-ten Summanden der Reihen (a) - (e). **12/4/10/2**

(a) $\sum \frac{1}{6n}$ ist eine divergente Minorante von $\sum a_n$; folglich ist $\sum a_n$ divergent.

(b) $\sum \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{n(n+1)}$ ist eine konvergente Majorante von $\sum b_n$; folglich ist $\sum b_n$ absolut konvergent.

(c) $\sum \frac{1}{n+1}$ ist eine divergente Minorante von $\sum c_n$; folglich ist $\sum c_n$ divergent.

(d) $\sum d_n$ ist alternierend und (d_n) eine streng monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibniz-Kriterium ist $\sum d_n$ konvergent.

(e) Sei $s = \pm \frac{k}{m}$, $k, n \in \mathbb{N}$ und $m > 0$.
Für $s = 0$ ist $\sum e_n$ divergent.
Für $s = \frac{k}{m}$ ist $\sum e_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.
Für $s = -\frac{k}{m}$ ist (e_n) keine Nullfolge und somit $\sum e_n$ nicht konvergent.

Lösung zu Aufgabe 4.10 **12/4/10/3**

(a) Es sei $a_n := \frac{1}{6n-1}$. Wir bilden eine divergente Minorante von $\sum a_n$. Es ist

$$a_n = \frac{1}{6n-1} \geq \frac{1}{6n} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n}.$$

Die harmonische Reihe ist bestimmt divergent gegen ∞. Damit ist $\sum \frac{1}{6n}$ eine divergente Minorante von $\sum a_n$, folglich ist $\sum a_n$ divergent.

(b) Es sei $a_n := \frac{1}{(8n+9)^2}$. Wir bilden eine konvergente Majorante von $\sum a_n$. Es ist

$$a_n \leq \frac{1}{(8n+8)^2} = \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{n(n+1)} := b_n.$$

Nach Aufgabe 4.4 ist $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergent, folglich ist $\sum b_n$ eine konvergente Majorante von $\sum a_n$ und somit ist $\sum a_n$ konvergent.

(c) Es sei $a_n := \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. Wir bilden eine divergente Minorante von $\sum a_n$. Es ist

$$a_n \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1} := b_n.$$

Folglich ist $\sum b_n$ eine divergente Minorante von $\sum a_n$, damit ist $\sum a_n$ divergent.

(d) Es sei $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Wegen $a_n > 0$ ist $\sum(-1)^n a_n$ alternierend.

Weiterhin ist

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

und daher ist (a_n) eine (streng) monoton fallende Nullfolge. Folglich ist $\sum(-1)^n a_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.

(e) Es sei $a_n := \frac{(-1)^n}{n^s}$, $s = \pm\frac{k}{m}$, $k, m \in \mathbb{N}$ und $m > 0$.

1. Fall: $s = 0$; dann ist (a_n) keine Nullfolge und daher $\sum a_n$ nicht konvergent.

2. Fall: $s = \frac{k}{m}$, $k > 0$. Dann ist durch $n^s = \sqrt[m]{n}^{\,k}$ eine streng monoton wachsende Folge gegeben mit $n^s \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Folglich ist $\left(\frac{1}{n^s}\right)$ eine streng monoton fallende Nullfolge. Daher ist $\sum a_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.

3. Fall: $s = -\frac{k}{m}$, $k > 0$. Wegen $\frac{1}{n^s} = \sqrt[m]{n}^{\,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ ist (a_n) keine Nullfolge und daher $\sum a_n$ divergent.

4.11 Für welche reellen Zahlen x sind die folgenden Reihen konvergent: **12/4/11/1**

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$; $x \neq -1$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^{2n+1}$; $x \neq 0$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n!}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.11 Seien a_n, b_n, c_n die n-ten Summanden der Reihen (a) - (c). **12/4/11/2**

(a) Für $|x| < 1$ ist $\lim|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |x|$ und somit $\sum a_n$ absolut konvergent.
Für $x = 1$ ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{2}$, also $\sum a_n$ absolut konvergent.
Für $|x| > 1$ ist $\sum a_n$ (absolut) konvergent.

(b) Für $|x| \leq 3$ ist (b_n) keine Nullfolge und somit $\sum b_n$ nicht konvergent.
Für $|x| > 3$ ist $\lim \sqrt[n]{|b_n|} = |\frac{3}{x}|^2 < 1$. Folglich ist $\sum b_n$ absolut konvergent.

(c) Für $|x| \geq 1$ ist (c_n) keine Nullfolge, also $\sum c_n$ divergent.
Für $|x| < 1$ ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |x|^{n+1} \to 0$, also $\sum c_n$ absolut konvergent.

Lösung zu Aufgabe 4.11 **12/4/11/3**

(a) Es sei $a_n := \dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$. Wir benutzen das Quotientenkriterium.

Es ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{|x|}{|1+x^{n+1}|}$. Für $|x|<1$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} x^{n+1} = 0$, also

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{\lim|1+x^{n+1}|} = |x| < 1.$$

Folglich ist $\sum a_n$ (absolut) konvergent.

Ist $x = 1$, so ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} := q < 1$ für alle n.

Somit ist $\sum a_n$ (absolut) konvergent.

Es sei jetzt $|x| > 1$. Dann ist

$$|1+x^{n+1}| \geq \left|1 - |x|^{n+1}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Folglich ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ eine Nullfolge und somit $\sum a_n$ (absolut) konvergent.

Die Reihe konvergiert also für alle $x \neq -1$.

(b) Es sei $a_n := \left(\frac{3}{x}\right)^{2n+1}$ und $x \neq 0$ beliebig, aber fest.

Für $|x| \leq 3$ ist $|\frac{3}{x}| \geq 1$. Folglich ist $(|a_n|)$ keine Nullfolge und somit $\sum a_n$ nicht konvergent.

Es sei jetzt $|x| > 3$, also $|\frac{x}{3}| < 1$ und somit $|\frac{x}{3}|^2 < 1$. Wir benutzen das Wurzelkriterium. Es ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|\tfrac{3}{x}|^{2n+1}} = |\tfrac{3}{x}|^2 \cdot \sqrt[n]{|\tfrac{3}{x}|}.$$

Folglich ist

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = |\tfrac{3}{x}|^2 \cdot \lim \sqrt[n]{|\tfrac{3}{x}|} = |\tfrac{3}{x}|^2 < 1.$$

Damit ist $\sum a_n$ für alle $|x| > 3$ (absolut) konvergent.

(c) Sei $a_n := x^{n!}$.

Für $|x| \geq 1$ ist (a_n) offenbar keine Nullfolge und somit $\sum a_n$ nicht konvergent.

Es sei jetzt $|x| < 1$. Wir benutzen das Quotientenkriterium. Es ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|^{n+1} \quad \text{und daher} \quad \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0.$$

Für $|x| < 1$ ist also $\sum a_n$ (absolut) konvergent.

4.12 Unter Benutzung von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ ist nachzuweisen, daß für folgende Reihen, die aus der oben angegebenen Reihe durch Umordnung ihrer Glieder entstehen, gilt: **12/4/12/1**

(a) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{3}{2}\ln 2.$

(b) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=\frac{1}{2}\ln 2.$

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.12 In konvergenten Reihen dürfen Klammern beliebig gesetzt werden, ohne das Konvergenzverhalten und den Wert der Reihe zu verändern. **12/4/12/2**

Sei $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$. Folglich ist

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}}_{:=b_n}\Big):=\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$

$\displaystyle\sum a_n=\sum\Big(\underbrace{\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}}_{:=c_n}\Big):=\sum c_n.$

Geschicktes „Manipulieren“ mit den neuen Reihen liefert das Ergebnis.

(b) Es ist $\dfrac{1}{4n-2}-\dfrac{1}{4n}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{4n-2}-\dfrac{1}{4n}:=d_n$ und somit $\sum\frac{a_n}{2}=\sum d_n$.

Unter Ausnutzung der Ergebnisse von (a) erhält man die Behauptung.

Lösung zu Aufgabe 4.12 Es sei $a_n:=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$. Nach Voraussetzung konvergiert **12/4/12/3** $\sum a_n$ gegen $\ln 2$, folglich konvergiert $\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}$ gegen $\frac{1}{2}\ln 2$. In konvergenten Reihen dürfen Klammern gesetzt werden, ohne das Konvergenzverhalten und den Wert der Reihe zu verändern.

(a) In der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}$ werden jetzt jeweils zwei aufeinanderfolgende Glieder durch Klammern zusammengefaßt, dadurch entsteht:

$$\frac{1}{2}\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\Big):=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\quad\text{mit}\quad b_n=\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}.$$

Es werden jetzt in der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jeweils 4 aufeinanderfolgende Glieder durch Klammern zusammengefaßt. Es entsteht:

$$\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\Big):=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$$

mit $c_n=\dfrac{1}{4n-3}-\dfrac{1}{4n-2}+\dfrac{1}{4n-1}-\dfrac{1}{4n}$.

Konvergente Reihen dürfen gliedweise addiert werden. Es ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\ln 2+\ln 2=\frac{3}{2}\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}b_n+\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+c_n)\quad\text{und}$$

$$b_n+c_n=\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}=\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}.$$

Die k-te Partialsumme von $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots$ sei S_k,
und die m-te Partialsumme von $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+c_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)$ sei S'_m.
Dann gilt offenbar:

für $k=3m$: $\quad S_k=S'_m$,

für $k=3m+1$: $\quad S_k=S'_m+\frac{1}{3m+1}$, und

für $k=3m+2$: $\quad S_k=S'_m+\frac{1}{3m+1}+\frac{1}{3m+3}$, also

für $3m\le k\le 3m+2$ ist $S_k=S'_m+\alpha_k$, wobei α_k gleich 0 bzw. $\frac{1}{3m+1}$ bzw. $\frac{1}{3m+1}+\frac{1}{3m+3}$ ist (falls $k=3m,\ 3m+1,\ 3m+2$) und somit $\alpha_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.
Hieraus erhält man:

$$\lim_{k\to\infty}S_k=\lim_{m\to\infty}S'_m+\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\tfrac{3}{2}\ln 2.$$

Dies beweist unsere Behauptung.

(b) Wegen $\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}=\frac{2}{4n-2}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}:=d_n$ gilt:

$$\tfrac{1}{2}\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}d_n.$$

Es sei S_k die k-te Partialsumme von $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\dots$
und S'_m die m-te Partialsumme von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}$. Dann gilt offenbar:

für $k=3m$: $\quad S_k=S'_m$,

für $k=3m+1$: $\quad S_k=S'_m+\frac{1}{2m+1}$, und

für $k=3m+2$: $\quad S_k=S'_m+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{4m+2}=S'_m+\frac{1}{4m+2}$, also

für $3m\le k\le 3m+2$ ist $S_k=S'_m+\alpha_k$ und $\alpha \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, wobei α_k analog wie unter (a) gebildet ist. Hieraus erhält man:

$$\lim_{k\to\infty}S_k=\lim_{m\to\infty}S'_m+\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\tfrac{1}{2}\ln 2.$$

Damit gilt auch diese Behauptung.

4.13 Eine Schnecke wird auf ein 1 km langes „Gummiband“ gesetzt; sie soll das Band von Anfang bis Ende „durchlaufen“. Sie legt pro Sekunde 1 cm zurück. Nach jeder Sekunde wird jedoch das Gummiband (in seiner gesamten Länge) um 1 km ausgedehnt (die Ausdehnung soll gleichmäßig über das ganze Band erfolgen). **12/4/13/1**
Frage: Wird die Schnecke jemals das Ende des Gummibandes erreichen (falls sie genügend viel Zeit zur Verfügung hat) ?

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.13 S_n sei die Maßzahl des Abstands der Schnecke vom Startpunkt nach n Schritten. Dann gilt: **12/4/13/2**

$$S_n=(S_{n-1}+1)\cdot\frac{n+1}{n}=(n+1)(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{n}).\quad \text{(induktiv überprüfen!)}$$

Sei $L_n = (n+1)\cdot 100\,000$ (Maßzahl der Gesamtlänge des Bandes nach n Schritten).
$L_n - S_n$ ist die Distanz der Schnecke zum Endpunkt;
$L_n - S_n = (n+1)\Big(100\,000 - (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n})\Big)$.
Da die harmonische Reihe bestimmt divergiert, erreicht die Schnecke ihr Ziel.

Lösung zu Aufgabe 4.13 Sei S_n die Maßzahl des Abstandes der Schnecke vom Startpunkt nach n Schritten, wobei jeweils ein Schritt nach Ablauf einer Sekunde und der anschließenden Ausdehnung des Bandes beendet ist. **12/4/13/3**

Im 1. Schritt kriecht die Schnecke 1 cm und das Band wird auf das Doppelte ausgedehnt, also auch der zurückgelegte Zentimeter. Folglich ist $S_1 = 1 + 1$ (cm).

Im 2. Schritt kriecht die Schnecke abermals 1 cm; sie befindet sich vor der Ausdehnung des Bandes $S_1 + 1$ cm vom Startpunkt entfernt. Nach der Ausdehnung des Bandes auf $\frac{3}{2}$ beträgt ihr Abstand vom Ausgangspunkt $S_2 = (S_1+1)\cdot\frac{3}{2}$ usw.

Vor dem n-ten Schritt ist die Schnecke S_{n-1} cm vom Startpunkt entfernt. Im n-ten Schritt kommt 1 cm hinzu, und das Band wird in seiner gesamten Länge auf $\frac{n+1}{n}$ ausgedehnt, also $S_n = (S_{n-1}+1)\cdot\frac{n+1}{n}$.

Damit gilt:

$$S_1 = 2,$$

$$S_2 = (S_1+1)\cdot\frac{3}{2} = 3\cdot(1+\tfrac{1}{2}),\ \text{ und schließlich induktiv:}$$

$$\begin{aligned} S_n &= (S_{n-1}+1)\cdot\frac{n+1}{n} \\ &= \Big(n\cdot(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{n-1})+1\Big)\cdot\frac{n+1}{n} \\ &= (n+1)(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{n}). \end{aligned}$$

Es sei $L_n := (n+1)\cdot 100\,000$. Die Gesamtlänge des Bandes nach n Schritten beträgt also L_n cm. Die noch durch die Schnecke zu bewältigende Distanz bis zum Endpunkt (nach n Schritten) beträgt damit $(L_n - S_n)$ cm.

Es ist

$$\begin{aligned} L_n - S_n &= (n+1)\cdot 100\,000 - (n+1)(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{n}) \\ &= (n+1)\Big(100\,000 - (1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{n})\Big). \end{aligned}$$

Da die harmonische Reihe bestimmt divergiert gegen ∞, gibt es eine kleinste natürliche Zahl k, so daß $100\,000 - (1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}) \le 0$ und damit auch $L_k - S_k \le 0$.

Im k-ten Schritt erreicht die Schnecke ihr Ziel.

4.14 Berechnen Sie für die komplexen Zahlen $z_1 = 3+4i$, $z_2 = 1-i$: **12/4/14/1**

(a) $z_1\cdot z_2$, (b) $\dfrac{z_1}{z_2}$, (c) $|z_1|$,

(d) z_2^3, (e) $\sqrt{z_2}$, (f) $\sqrt{z_1}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.14 (a) $z_1 \cdot z_2 = 7 + i$. **12/4/14/2**

(b) $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} \cdot i$.

(c) $|z_1| = 5$.

(d) $z_2^3 = -2 - 2i$.

(e) $\sqrt{z_2} = \pm(2 + i)$.

(f) $\sqrt{z_1} = \pm\Big(\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})}} \cdot i\Big)$.

Lösung zu Aufgabe 4.14 **12/4/14/3**

(a) $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i)(1 - i) = 7 + i$.

(b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 4i}{1 - i} = \frac{(3 + 4i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} i$.

(c) $|z_1| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

(d) $z_2^3 = (1 - i)^2(1 - i) = -2 - 2i$.

(e) $\sqrt{z_2} = \sqrt{3 + 4i} := a + bi$.
Wir suchen alle reellen Zahlen a, b, so daß $(a + bi)^2 = 3 + 4i$.
Aus $\sqrt{3 + 4i} = a + bi$ folgt: $3 + 4i = a^2 - b^2 + 2abi$. Hieraus ergeben sich die Gleichungen: $a^2 - b^2 = 3$ und $2ab = 4$. $b = \frac{2}{a}$ in $a^2 - b^2 = 3$ eingesetzt, liefert schließlich die Lösungen dieser Gleichungen:

$$a = \pm 2 \text{ und } b = \pm 1, \text{ also } \sqrt{3 + 4i} = \pm(2 + i).$$

(f) $\sqrt{z_1} = \sqrt{1 - i} := a + bi$; folglich ist $1 - i = a^2 - b^2 + 2abi$. Hieraus ergeben sich die Gleichungen: $a^2 - b^2 = 1$ und $2ab = -1$. Die Lösungen der Gleichungen liefern:

$$a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{2})} \quad \text{und} \quad b = \mp\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}}, \quad \text{also}$$

$$\sqrt{1 - i} = \pm\Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{2})} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}}\, i\Big).$$

4.15 (a) Es sei $R_n := \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$ und $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \leq q < 1$ für $i > n$. **12/4/15/1**

Beweisen Sie, daß $|R_n| \leq \frac{|a_{n+1}|}{1 - q}$ ist.

(b) Unter Benutzung von $\mathrm{e}^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ $(x \in \mathbb{R})$ berechne man $\mathrm{e}^{0,1}$ auf 4 Stellen genau, d.h., $|R_n| = \Big|\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{0,1^i}{i!}\Big| < \frac{1}{10^4}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.15 (a) Induktiv über i zeigt man $|a_{n+1+i}| \leq q^i|a_{n+1}|$. **12/4/15/2**
Unter Benutzung der geometrischen Reihe erhält man die Behauptung.

(b) Für $a_i = \frac{x^i}{i!}$ ist $|\frac{a_{i+1}}{a_i}| \leq |x| = \frac{1}{10} := q$.
Nach (a) ist $|R_n| \leq \frac{|a_{n+1}|}{1-q} < \frac{1}{10^4}$ und somit $|a_{n+1}| < \frac{1}{9 \cdot 10^3}$.
$n = 3$ leistet das Verlangte: $\mathrm{e}^{0.1} = \sum_{i=0}^{3} \frac{0.1^i}{i!} = \frac{6631}{6000} \approx 1,10517$.

Lösung zu Aufgabe 4.15 **12/4/15/3**

(a) Nach Voraussetzung ist $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \leq q < 1$ für $i > n$. Folglich ist die unter (a) betrachtete Reihe absolut konvergent. Weiterhin ist $|a_{i+1}| \leq q \cdot |a_i|$ für $i > n$. Induktiv über i zeigt man leicht, daß $|a_{n+1+i}| \leq q^i \cdot |a_{n+1}|$. Damit erhält man mit Hilfe der geometrischen Reihe:

$$|R_n| = \Big|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i\Big| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| = \sum_{i=0}^{\infty} |a_{n+1+i}| \leq \sum_{i=0}^{\infty} q^i \cdot |a_{n+1}| = |a_{n+1}| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{|a_{n+1}|}{1-q}.$$

(b) Für $a_i := \frac{x^i}{i!}$ ist

$$\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = \left|\frac{x^{i+1} \cdot i!}{(i+1)! \cdot x^i}\right| = \frac{|x|}{i+1} \leq |x| = \frac{1}{10} := q.$$

Für alle $i \geq 0$ gilt also $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| \leq \frac{1}{10} = q$.
Entsprechend der Aufgabe (a) suchen wir das kleinste n, so daß

$$|R_n| \leq \frac{|a_{n+1}|}{1-q} < \frac{1}{10^4}; \quad \text{d.h.} \quad |a_{n+1}| < \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{10^4} = \frac{1}{9 \cdot 10^3}.$$

Für $n = 2$ ist $|a_{n+1}| = \frac{1}{3! \cdot 10^3} > \frac{1}{9 \cdot 10^3}$.
$n = 2$ leistet also noch nicht das Verlangte.
Es sei jetzt $n = 3$. Dann ist

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{4! \cdot 10^4} < \frac{1}{9 \cdot 10^3}. \qquad \text{(Die gesuchte Zahl } n \text{ ist 3.)}$$

Wir bilden jetzt $\sum_{i=0}^{3} \frac{0,1^i}{i!} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} = \frac{6631}{6000} \approx 1,10517$.

Damit ist $\left|\mathrm{e}^{0,1} - \frac{6631}{6000}\right| < \frac{1}{10^4}$.

4.16 Es sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Zeigen Sie: **12/4/16/1**

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(|a| + |b|) \;\leq\; |z| \;\leq\; |a| + |b|.$$

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.16 Durch Quadrieren zeigt man $\frac{\sqrt{2}}{2}(|a| + |b|) \leq$ **12/4/16/2**
$\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$.

Hieraus ergibt sich die Behauptung.

Lösung zu Aufgabe 4.16 Es ist $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Wir zeigen: **12/4/16/3**

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}(|a|+|b|) \leq \sqrt{a^2+b^2}$ und

2. $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|$.

Da auf beiden Seiten der Ungleichungen nur nicht-negative Größen auftreten, gilt:

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}(|a|+|b|) \leq \sqrt{a^2+b^2} \iff \frac{2}{4}(a^2+2|a|\cdot|b|+b^2) \leq a^2+b^2$
$\iff a^2+2|a|\cdot|b|+b^2 \leq 2a^2+2b^2$
$\iff 0 \leq (|a|-|b|)^2$; und diese Ungleichung ist korrekt.

2. $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b| \iff a^2+b^2 \leq a^2+2|a|\cdot|b|+b^2$
$\iff 0 \leq 2|a|\cdot|b|$; und dies gilt wiederum.

4.17 Wo liegen die Zahlen z in der Gaußschen Zahlenebene mit: **12/4/17/1**

(a) $|z+3| \leq 2$, (b) $\mathrm{Re}(z) \geq 1$,
(c) $\left|\frac{z-1}{z-2}\right| = 1$, (d) $\mathrm{Re}(z^2) = a$, (a reell).

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.17 Es sei stets $z = x+iy$. **12/4/17/2**

(a) Durch $-5 \leq x \leq -1$ und $-\sqrt{4-(x+3)^2} \leq y \leq \sqrt{4-(x+3)^2}$ ist die Lösungsmenge gegeben.

(b) Mit $x \geq 1$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig ist die Lösungsmenge gegeben.

(c) Mit $x = \frac{3}{2}$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig ist die Lösungsmenge gegeben.

(d) Für $a \leq 0$ ist durch $x \in \mathbb{R}$ und $y = \pm\sqrt{x^2-a}$ die Lösungsmenge bestimmt; für $a > 0$ ist sie durch $|x| \leq \sqrt{a}$ und $y = \pm\sqrt{x^2-a}$ gegeben.

Lösung zu Aufgabe 4.17 Im Folgenden sei $z = x+iy$. Dann gilt: **12/4/17/3**

(a) $|z+3| = \sqrt{(x+3)^2+y^2} \leq 2 \iff (x+3)^2+y^2 \leq 4 \iff (x+3)^2 \leq 4-y^2$.
Wegen $0 \leq (x+3)^2$ ist insbesondere $y^2 \leq 4$, also $|y| \leq 2$.
Weiterhin gilt: $|x+3| \leq \sqrt{4-y^2} \leq 2$ und $y^2 \leq 4-(x+3)^2$,
also $|y| \leq \sqrt{4-(x+3)^2}$.
1. Fall: $x+3 \geq 0$. Dann ist $x \geq -3$ und $|x+3| = x+3 \leq 2$ und somit $x \leq -1$.
Also $-3 \leq x \leq -1$ und $-\sqrt{4-(x+3)^2} \leq y \leq \sqrt{4-(x+3)^2}$.
2. Fall: $x+3 < 0$. Dann ist $x < -3$ und $|x+3| = -x-3 \leq 2$ und somit $x \geq -5$.
Also $-5 \leq x < -3$ und $-\sqrt{4-(x+3)^2} \leq y \leq \sqrt{4-(x+3)^2}$.
Folglich ist durch $z = x+iy$ mit $-5 \leq x \leq -1$ und $-\sqrt{4-(x+3)^2} \leq y \leq \sqrt{4-(x+3)^2}$ die Lösungsmenge von $|z+3| \leq 2$ gegeben.

(b) $\mathrm{Re}(z) \geq 1 \iff x \geq 1$ und y beliebig.
Folglich sind durch $z = x + iy$ mit $x \geq 1$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig alle Lösungen von $\mathrm{Re}(z) \geq 1$ gegeben.

(c) $$\begin{aligned} \left|\frac{z-1}{z-2}\right| = 1 &\iff |z-1| = |z-2| \text{ und } |z-2| \neq 0 \\ &\iff \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2+y^2} \text{ und } \sqrt{(x-2)^2+y^2} \neq 0 \\ &\iff (x-1)^2+y^2 = (x-2)^2+y^2 \text{ und } (x-2)^2+y^2 \neq 0 \\ &\iff 2x = 3 \text{ und } (x \neq 2 \text{ oder } y \neq 0) \\ &\iff x = \tfrac{3}{2} \text{ und } y \text{ beliebig.} \end{aligned}$$
Durch $z = x+iy$ mit $x = \frac{3}{2}$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig sind alle Lösungen von $\left|\frac{z-1}{z-2}\right| = 1$ gegeben.

(d) Es ist $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$. Folglich gilt:
$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z^2) = a &\iff x^2 - y^2 = a \\ &\iff y^2 = x^2 - a \quad (\geq 0) \\ &\iff a \leq x^2 \text{ und } |y| = \sqrt{x^2-a}. \end{aligned}$$
Für $a \leq 0$ bzw. $a > 0$ sind durch $z = x + iy$ mit $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $y = \pm\sqrt{x^2-a}$ bzw. mit $-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ und $y = \pm\sqrt{x^2-a}$ alle Lösungen von $\mathrm{Re}(z^2) = a$ gegeben.

4.18 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen: **12/4/18/1**

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.18 Es seien $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ die Konvergenzradien der Reihen (a) - (c). **12/4/18/2**

(a) $\varrho_a = 1$.

(b) $\varrho_b = 2$.

(c) $\varrho_c = \frac{1}{4}$.

Lösung zu Aufgabe 4.18 **12/4/18/3**

(a) Es ist $\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}^{\,2}} = 1$.

Folglich ist $\frac{1}{l} = 1$ der Konvergenzradius der betrachteten Reihe.

(b) Es ist $\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}$.

Somit ist $\frac{1}{l} = 2$ der Konvergenzradius der Reihe.

(c) Es sei $a_n := \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$. Folglich ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+2)!\cdot n!\cdot n!}{(n+1)!\cdot(n+1)!\cdot(2n)!} = 2\cdot\frac{2n+1}{n+1} = 2\cdot\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4.$$

Somit ist $\frac{1}{4}$ der Konvergenzradius der Reihe.

4.19 Es sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ die Cauchysche Produktreihe von $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a^n$ mit $|a| < 1$. **12/4/19/1**

(a) Man zeige: $c_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\cdot a^n$.

(b) Welchen Grenzwert hat P ?

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.19 (a) Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus dem Produkt. **12/4/19/2**

(b) $P = \frac{1}{(1-a)^3}$.

Lösung zu Aufgabe 4.19 **12/4/19/3**

(a) Wir bilden das Cauchyprodukt $P = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der Reihen $\sum_{n\to 0}^{\infty} a^n$ und $\sum_{n\to 0}^{\infty}(n+1)\cdot a^n$.
Nach Definition dieses Produkts gilt:

$$\begin{aligned} P &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot a^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n} a^i\cdot(j+1)\cdot a^j\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n}(j+1)\Big)\cdot a^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)\Big)\cdot a^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}\cdot a^n. \end{aligned}$$

Also $c_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\cdot a^n$.

(b) Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ und somit

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n} 1\Big)\cdot a^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot a^n.$$

Folglich ist $P = \frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{(1-a)^2} = \frac{1}{(1-a)^3}$.

4.20 Man beweise für alle $x, y \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$. **12/4/20/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.20 Das Cauchy-Produkt von $\mathrm{e}^x = \sum \frac{x^n}{n!}$ mit sich selbst liefert das Resultat. **12/4/20/2**

Lösung zu Aufgabe 4.20 Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\mathrm{e}^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. **12/4/20/3**

Mit Hilfe des Cauchyprodukts für Reihen und des binomischen Satzes erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!} \cdot \frac{y^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Big(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} \cdot x^\nu y^{n-\nu}\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{x+y}.
\end{aligned}$$

4.21 Zerlegen Sie $\exp(ix) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$ in Real- und Imaginärteil $(i^2 = -1)$. **12/4/21/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.21 In absolut konvergenten Reihen dürfen die Glieder beliebig umgeordnet werden, ohne das Konvergenzverhalten und die Werte der Reihen zu verändern. **12/4/21/2**
Wegen $i^{2n} = (-1)^n$ und $i^{2n+1} = (-1)^n \cdot i$ lassen sich die reellen und imaginären Glieder der Reihe zu neuen Reihen zusammenfassen.

Lösung zu Aufgabe 4.21 Da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, darf die Reihe beliebig umgeordnet werden, ohne das Konvergenzverhalten und den Wert der Reihe zu verändern. **12/4/21/3**

Für gerade n, $n = 2m$, ist

$$\frac{(ix)^n}{n!} = \frac{i^{2m} \cdot x^{2m}}{(2m)!} = (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Für ungerade n, $n = 2m+1$, ist

$$\frac{(ix)^n}{n!} = \frac{i^{2m+1} \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!} = i \cdot (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Folglich gilt:

$$\exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Also

$$\mathrm{Re}(\exp(ix)) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} \quad \text{und}$$

$$\mathrm{Im}(\exp(ix)) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

4.22 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und formulieren Sie das jeweils benutzte Konvergenzkriterium: **12/4/22/1**

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+3}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n+3}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.22 Es seien $a_n, \ldots, d_n$ die n-ten Summanden der Reihen (a) - (d). **12/4/22/2**

(a) Das Quotientenkriterium liefert $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$, folglich ist $\sum a_n$ divergent.

(b) $\sum \frac{1}{n^2}$ ist eine konvergente Majorante von $\sum b_n$, folglich ist $\sum b_n$ absolut konvergent.

(c) $\sum \frac{1}{n}$ ist eine divergente Minorante von $\sum c_n$, folglich ist $\sum c_n$ divergent.

(d) Die Folge $(|d_n|)$ ist streng monoton fallend; folglich ist $\sum d_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.

Lösung zu Aufgabe 4.22 **12/4/22/3**

(a) Wir benutzen das Quotientenkriterium (Teil 2):
Es sei $a_n \neq 0$ für jedes n. Dann gilt:
Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, für (fast) alle n, dann ist $\sum a_n$ divergent.
Es sei $a_n := \frac{n^n}{n!}$. Dann ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq 1.$$

Folglich ist $\sum a_n$ divergent.

(b) Wir benutzen das Majorantenkriterium (Teil 1):
Es seien $\sum a_n$, $\sum b_n$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern und es sei $a_n \leq b_n$ für (fast) alle n. Dann gilt: Ist $\sum b_n$ konvergent, so ist auch $\sum a_n$ konvergent.
Es sei $a_n := \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+3}$. Dann ist

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n} \cdot \frac{1}{n^2 + \frac{3}{n}} \leq \frac{1}{n^2 + \frac{3}{n}} \leq \frac{1}{n^2} := b_n \quad \text{für } n \geq 2.$$

Da $\sum b_n$ konvergiert, ist auch $\sum a_n$ konvergent.

(c) Wir benutzen das Majorantenkriterium (Teil 2):
Es seien $\sum a_n$, $\sum b_n$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern und es sei $a_n \leq b_n$ für (fast) alle n. Dann gilt: Ist $\sum a_n$ divergent, so ist auch $\sum b_n$ divergent.
Es sei jetzt $b_n := \frac{2n+1}{n^2}$. Wegen $b_n = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{2}{n} > \frac{1}{n} := a_n$ ist die harmonische Reihe $\sum a_n$ eine divergente Minorante von $\sum b_n$. Folglich ist $\sum b_n$ divergent.

(d) Wir benutzen das Leibniz-Kriterium: Ist $\sum a_n$ alternierend und $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge, dann ist $\sum a_n$ konvergent.
Es sei $a_n := (-1)^n \cdot \frac{2}{n+3}$. Offenbar ist $\sum a_n$ alternierend und $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge. Folglich ist $\sum a_n$ konvergent.

4.23 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und formulieren Sie das jeweils benutzte Konvergenzkriterium: **12/4/23/1**

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2}$, (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{(n+1)3^n}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.23 Es seien $a_n, \ldots, c_n$ die n-ten Summanden der Reihen (a) - (c). **12/4/23/2**

(a) $\sum \frac{1}{n}$ ist eine divergente Minorante von $\sum a_n$; folglich ist $\sum a_n$ divergent.

(b) Es ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^2 \leq \frac{3}{4}$, folglich ist $\sum b_n$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent.

(c) Die Folge $(|c_n|)$ ist streng monoton fallend, folglich ist $\sum c_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.

Lösung zu Aufgabe 4.23 **12/4/23/3**

(a) Wir benutzen das Majorantenkriterium (Teil 2):
Es seien $\sum a_n$, $\sum b_n$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern und es sei $a_n \leq b_n$ für (fast) alle n. Dann gilt: Ist $\sum a_n$ divergent, so ist auch $\sum b_n$ divergent.
Es sei jetzt $b_n := \frac{2n+3}{n^2}$. Wegen $b_n = \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} > \frac{1}{n} := a_n$ ist die harmonische Reihe $\sum a_n$ eine divergente Minorante von $\sum b_n$. Folglich ist $\sum b_n$ divergent.

(b) Wir benutzen das Quotientenkriterium (Teil 1):
Es sei $a_n \neq 0$ für jedes n. Dann gilt: Gibt es ein q mit $0 < q < 1$, so daß $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für (fast) alle n, so ist $\sum b_n$ konvergent.
Es sei $a_n := \frac{2n^2}{(n+1)\cdot 3^n}$, folglich ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2(n+1)^2(n+1)\cdot 3^n}{(n+2)\cdot 3^{n+1}\cdot 2n^2} = \frac{(n+1)^3}{n^2(n+2)\cdot 3} \leq \frac{(n+1)^2}{3n^2}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2 = \frac{1}{3}\cdot\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^2 \leq \frac{1}{3}\cdot\Big(1+\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{3}{4} := q \quad \text{für } n \geq 2.$$

Folglich ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

(c) Wir benutzen das Leibniz-Kriterium: Ist $\sum a_n$ alternierend und $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge, dann ist $\sum a_n$ konvergent.
Es sei $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Offenbar ist $a_n > 0$ und somit $\sum(-1)^n \cdot a_n$ alternierend. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}. \end{aligned}$$

Folglich ist $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge und daher $\sum(-1)^n \cdot a_n$ konvergent.

4.24 (a) Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. **12/4/24/1**

(b) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.24 (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. **12/4/24/2**

(b) $\frac{n}{(n+1)^2} \geq \frac{1}{n+3}$; $\sum \frac{1}{n+3}$ ist eine divergente Minorante von $\sum \frac{n}{(n+1)^2}$.
Folglich ist die Reihe divergent.

Lösung zu Aufgabe 4.24 **12/4/24/3**

(a) Es ist $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (vgl. Aufgabe 4.4). Folglich ist

$$S_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{k+1} \quad \text{und somit} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

(b) Wir benutzen das Majorantenkriterium (Teil 2):
Es seien $\sum a_n$, $\sum b_n$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern und es sei $a_n \leq b_n$ für (fast) alle n. Dann gilt: Ist $\sum a_n$ divergent, so ist auch $\sum b_n$ divergent.
Es sei jetzt $b_n := \frac{n}{(n+1)^2}$. Dann ist $b_n = \frac{1}{n+2+\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n+3} := a_n$
Da die harmonische Reihe divergiert, ist auch $\sum a_n$ divergent und somit $\sum b_n$.

4.25 Untersuchen Sie die folgenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz: **12/4/25/1**

(a) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$,

(b) $a_n = (-1)^n \frac{1}{a\,n+b}$, $\quad a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0$,

(c) $a_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n, \quad a \in \mathbb{R}.$

Formulieren Sie das jeweils benutzte Konvergenzkriterium.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.25 (a) $\sum \frac{1}{n}$ ist eine divergente Majorante der Ausgangsreihe. Folglich ist diese divergent. **12/4/25/2**

(b) Die Folge $(|a_n|)$ ist streng monoton fallend. Nach dem Leibniz-Kriterium ist die Ausgangsreihe konvergent.

(c) Nach dem Wurzelkriterium ist die Reihe für $|a| < 1$ absolut konvergent und für $|a| > 1$ divergent. Für $|a| = 1$ ist (a_n) keine Nullfolge, folglich ist die Reihe nicht konvergent.

Lösung zu Aufgabe 4.25 **12/4/25/3**

(a) Wir benutzen das Majorantenkriterium (Teil 2):
Es seien $\sum a_n$, $\sum b_n$ Reihen mit nicht-negativen Gliedern und es sei $a_n \leq b_n$ für (fast) alle n. Dann gilt: Ist $\sum a_n$ divergent, so ist auch $\sum b_n$ divergent.
Es ist $a_n := \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}$. $\sum \frac{1}{n}$ ist eine divergente Minorante von $\sum a_n$.
Folglich ist $\sum a_n$ divergent.

(b) Wir benutzen das Leibniz-Kriterium: Ist $\sum a_n$ alternierend und $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge, dann ist $\sum a_n$ konvergent.
Offenbar ist $(|a_n|)$ eine monoton fallende Nullfolge. Folglich ist $\sum a_n$ konvergent.

(c) Wir benutzen das Wurzelkriterium („Limesform"):
Es existiere $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so ist $\sum a_n$ konvergent;
wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so ist $\sum a_n$ divergent.
Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left|a + \frac{1}{n}\right| = |a|.$$

Für $|a| < 1$ ist $\sum a_n$ absolut konvergent, für $|a| > 1$ ist $\sum a_n$ divergent.
Für den Fall, daß $|a| = 1$ ist, sind gesonderte Untersuchungen erforderlich.
1. Fall: $a = 1$; dann ist $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}$.
Folglich ist (a_n) keine Nullfolge und somit $\sum a_n$ nicht konvergent.
2. Fall: $a = -1$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (-1)^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{(\frac{n+1}{n})^n} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n}. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ und $\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\mathrm{e}}$ ist (a_{n+1}) keine Nullfolge;
also auch für $a = -1$ ist $\sum a_n$ divergent.

Für den Fall $|a| = 1$ haben wir das folgende Kriterium benutzt:
Ist (a_n) keine Nullfolge, dann ist $\sum a_n$ divergent.

4.26 Bestimmen Sie den Konvergenzradius für die folgenden Potenzreihen: **12/4/26/1**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n; \quad x \in \mathbb{R},$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^n}\, x^n; \quad x \in \mathbb{R},$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n; \quad x \in \mathbb{R}.$ Geben Sie bei (c) das genaue Konvergenzgebiet der Reihe an.

Lösungshinweis zu Aufgabe 4.26 Seien $\varrho_a, \ldots, \varrho_c$ die Konvergenzradien der Reihen (a) - (c). **12/4/26/2**

(a) $\varrho_a = \frac{1}{\mathrm{e}}.$

(b) $\varrho_b = 0.$

(c) $\varrho_c = 1.$ Für $x = -1$ ist die Reihe konvergent, für $x = 1$ divergent.

Lösung zu Aufgabe 4.26 **12/4/26/3**

(a) Es sei $a_n := \frac{n^n}{n!}$. Dann ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}.$$

Folglich besitzt $\sum a_n x^n$ den Konvergenzradius $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(b) Es sei $b_n := \sqrt{n^n}$. Dann gilt:

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{\sqrt{n}^{\,n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Folglich ist der Konvergenzradius von $\sum b_n x^n$ null.

(c) Es sei jetzt $c_n := \frac{1}{n}$. Dann ist

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Somit besitzt $\sum c_n x^n$ den Konvergenzradius 1, d.h., für $|x| < 1$ ist $\sum c_n x^n$ absolut konvergent und für $|x| > 1$ ist $\sum c_n x^n$ divergent.
Für $|x| = 1$ sind gesonderte Untersuchungen notwendig.
Ist $x = -1$, so erhält man die alternierende Reihe $\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Ist $x = 1$, so entsteht die harmonische Reihe, die bekanntlich divergiert. Damit ergibt sich als Konvergenzgebiet $[-1, 1)$.

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.1 Zeigen Sie mit Hilfe der ε-δ-Abschätzung, daß die Funktionen $\sqrt{x}$ und $f\cdot g$ stetig sind, falls f und g stetig sind. **12/5/1/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.1 Für $\sqrt{x}$ an der Stelle $a = 0$ leistet $\delta := \varepsilon^2$ das Verlangte. Für $a > 0$ leistet $\delta := \sqrt{a}\cdot\varepsilon$ das Verlangte. **12/5/1/2**

Sei $0 < \varepsilon < 1$ und $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(1+|g(a)|)}$, $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2(1+|f(a)|)}$. Aufgrund der Stetigkeit von f bzw. g existieren für $\varepsilon_1 > 0$ bzw. $\varepsilon_2 > 0$ entsprechende $\delta_1 > 0$ bzw. $\delta_2 > 0$. Wählt man $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, so ist für $|x-a| < \delta$ auch $|(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(a)| < \varepsilon$.

Lösung zu Aufgabe 5.1 Eine Funktion ist stetig, wenn sie in ihrem gesamten Definitionsbereich stetig ist. **12/5/1/3**

Wir zeigen zunächst, daß $\sqrt{x}$ an jeder Stelle $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ stetig ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$.

1. Fall: $a = 0$. In diesem Fall wählen wir $\delta := \varepsilon^2$.

Dann gilt für alle $x \geq 0$:

Wenn $|x - 0| = |x| < \delta$, so $\sqrt{|x|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$; also $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$.

2. Fall: $a > 0$. Hierfür wählen wir $\delta := \sqrt{a}\cdot\varepsilon$.

Dann gilt für alle $x \geq 0$:

Wenn $|x-a| < \delta$, so $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \varepsilon$.

Es seien nun $D(f), D(g)$ die Definitionsbereiche von f bzw. g und $D := D(f) \cap D(g)$. Dann ist D der Definitionsbereich von $f\cdot g$.

Es genügt zu zeigen, daß $f\cdot g$ an jeder Stelle $a \in D$ stetig ist.

Nach Voraussetzung sind f und g in a stetig. Sei $0 < \varepsilon < 1$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, so daß

$$\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2(1+|g(a)|)} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 := \frac{\varepsilon}{2(1+|f(a)|)}.$$

Dann gibt es $\delta_1, \delta_2 > 0$, so daß für alle $x \in D$ gilt:

Wenn $|x-a| < \delta_1$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon_1$ und
wenn $|x-a| < \delta_2$, so $|g(x) - g(a)| < \varepsilon_2$.

Sei jetzt $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ und $|x-a| < \delta$, dann ist

$$\begin{aligned}
|(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(a)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)| \\
&\leq |f(x)|\cdot|g(x) - g(a)| + |g(a)|\cdot|f(x) - f(a)| \\
&\leq |f(x)|\cdot\varepsilon_2 + |g(a)|\cdot\varepsilon_1 \\
&= |f(x) - f(a) + f(a)|\cdot\varepsilon_2 + |g(a)|\cdot\varepsilon_1 \\
&\leq (|f(x) - f(a)| + |f(a)|)\cdot\varepsilon_2 + |g(a)|\cdot\varepsilon_1 \\
&< (1 + |f(a)|)\cdot\varepsilon_2 + (1 + |g(a)|)\cdot\varepsilon_1 \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

5.2 Untersuchen Sie, in welchen Punkten aus $\mathbb{R}$ die folgende Funktion f stetig bzw. nicht stetig ist: 12/5/2/1

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{für } 1 \leq x < 3, \\ 4 - x & \text{für } 3 \leq x. \end{cases}$$

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.2 Ganz-rationale Funktionen sind in ihren Definitionsbereichen stetig. Mit Hilfe der links- und rechtsseitigen Grenzwerte an den Stellen 0, 1, 3 erhält man die Stetigkeit von f an diesen Stellen. f ist also in $\mathbb{R}$ stetig. 12/5/2/2

Lösung zu Aufgabe 5.2 Im Beweis benutzen wir folgende Eigenschaften: 12/5/2/3

1. Ganz-rationale Funktionen sind stetig in $\mathbb{R}$.
2. f ist an der Stelle a stetig $\iff$ f besitzt an der Stelle a den Grenzwert $f(a)$.
3. f besitzt an der Stelle a den Grenzwert $f(a)$ $\iff$ f besitzt an der Stelle a den links- und rechtsseitigen Grenzwert $f(a)$.

Wir betrachten zunächst die „sensiblen“ Stellen $\{0, 1, 3\}$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 0 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0;$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (-x^2 + 4x - 2) = 1;$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (-x^2 + 4x - 2) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (4 - x) = 1.$$

Folglich ist f an den Stellen $0, 1, 3$ stetig. Darüber hinaus ist f in $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 3\}$ stetig, da ganz-rationale Funktionen in $\mathbb{R}$ stetig sind. f ist also in ganz $\mathbb{R}$ stetig.

5.3 Es sei $x \in \mathbb{R}$. $[x]$ bezeichne diejenige ganze Zahl mit der Eigenschaft $x - 1 < [x] \leq x$. 12/5/3/1

Man bestimme das Stetigkeitsverhalten der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = [x]$ mit $D(f) = \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = x - [x]$ mit $D(f) = \mathbb{R}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.3 (a) f ist in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig und an den Stellen $k \in \mathbb{Z}$ unstetig. 12/5/3/2

(b) f ist in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig und an den Stellen $k \in \mathbb{Z}$ unstetig.

Lösung zu Aufgabe 5.3 12/5/3/3

(a) Sei $k \in \mathbb{Z}$ beliebig. Offenbar ist f in dem Intervall $(k-1, k]$ konstant und somit in dem offenen Intervall $(k-1, k)$ stetig.

f ist an der Stelle k unstetig, denn

$$\lim_{\substack{x\to k\\ x<k}} [x] = k - 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to k\\ x>k}} [x] = k.$$

f ist also in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig und an den Stellen $k \in \mathbb{Z}$ unstetig.

(b) Sei $k \in \mathbb{Z}$. Da die Funktion $[x]$ in $(k-1, k]$ konstant ist, ist f als lineare Funktion in $(k-1, k)$ stetig.
An der Stelle k ist f unstetig, denn

$$\lim_{\substack{x \to k \\ x < k}} (x - [x]) = \lim_{\substack{x \to k \\ x < k}} x - \lim_{\substack{x \to k \\ x < k}} [x] = k - (k-1) = 1 \quad \text{und}$$
$$\lim_{\substack{x \to k \\ x > k}} (x - [x]) = k - k = 0.$$

Folglich ist f in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig und an den Stellen $k \in \mathbb{Z}$ unstetig.

5.4 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: **12/5/4/1**
Ist f injektiv und stetig in $[a, b]$, dann ist f streng monoton in $[a, b]$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.4 Aufgrund der Injektivität ist $f(a) \neq f(b)$. Für $f(a) < f(b)$ bzw. $f(a) > f(b)$ zeigt man leicht, daß f streng monoton wächst bzw. fällt in $[a, b]$. **12/5/4/2**

Lösung zu Aufgabe 5.4 Aus der Injektivität von f in $[a, b]$ folgt $f(a) < f(b)$ oder $f(b) < f(a)$. **12/5/4/3**

1. Fall: $f(a) < f(b)$. Wir zeigen, daß f streng monoton wächst.

Angenommen, f ist in $[a, b]$ nicht streng monoton wachsend, dann existieren $a_1, a_2 \in [a, b]$ mit $a_1 < a_2$ und $f(a_1) > f(a_2)$.

Wir nehmen eine erneute Fallunterscheidung vor:

(α) $f(b) < f(a_2)$. Wegen $f(a) < f(b)$ ist $f(a) < f(a_2) < f(a_1)$.
Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $c \in (a, a_1)$, so daß $f(c) = f(a_2)$.
Das widerspricht der Injektivität von f.

(β) $f(a_2) < f(b)$; dann ist $f(a_1) < f(b)$ oder $f(b) < f(a_1)$ und schließlich

$$f(a_2) < f(a_1) < f(b) \quad \text{oder} \quad f(a_2) < f(b) < f(a_1).$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $c \in (a_2, b)$, so daß $f(c) = f(a_1)$ oder es existiert ein $c \in (a_1, a_2)$, so daß $f(c) = f(b)$. In jedem Falle erhält man einen Widerspruch zur Injektivität von f. Folglich ist f streng monoton wachsend.

2. Fall: $f(b) < f(a)$. Hierfür zeigt man völlig analog wie im ersten Fall, daß f in $[a, b]$ streng monoton fällt.

5.5 Die Funktion f sei in $\mathbb{R}$ definiert durch: **12/5/5/1**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}, & \text{falls } x \notin \mathbb{N}, \\ \dfrac{4x - 6}{x + 1}, & \text{falls } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Unstetigkeitsstellen von f.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.5 Rationale Funktionen sind innerhalb ihres Definitionsbereiches stetig. **12/5/5/2**

Für $x \notin \mathbb{N}$ ist $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x}{x-2}$ stetig.

Weiterhin gilt: $f(n) = \lim\limits_{x \to n} f(x) \iff n \in \{1,\, 4\}$.

Folglich ist f in $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \{1, 4\}$ stetig und an den restlichen Stellen unstetig.

Lösung zu Aufgabe 5.5 Für $x \notin \mathbb{N}$ ist $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x}{x-2}$. **12/5/5/3**

f ist an der Stelle -1 nicht definiert und somit auch nicht stetig.
Wir betrachten jetzt die Stellen 1 bzw. 2. Für $x \neq 1$ und $x \neq 2$ ist

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x-2} = -1 = f(1).$$

Folglich ist f in 1 stetig. f besitzt an der Stelle 2 keinen Limes, damit ist f in 2 nicht stetig. Es sei nun $n \in \mathbb{N} \setminus \{-1, 1, 2\}$; dann ist

$$f(n) = \frac{4n-6}{n+1} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to n} f(x) = \lim_{x \to n} \frac{x}{x-2} = \frac{n}{n-2} \quad (\text{für } x \neq n).$$

Man überlegt sich leicht, daß

$$f(n) = \lim_{x \to n} f(x) \iff n \in \{1, 4\}.$$

Folglich ist f auch in 4 stetig und an den Stellen $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 4\}$ unstetig.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f offenbar in dem offenen Intervall $(n, n+1)$ stetig.

Insgesamt erhält man:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \text{und } f \text{ ist in } (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \{1, 4\} \text{ stetig.}$$

5.6 Es sei $x \geq 0$ und **12/5/6/1**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{falls } x = \frac{n}{m},\ m, n \in \mathbb{N} \text{ und } m, n \text{ teilerfremd}, \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f in allen rationalen Punkten seines Definitionsbereiches nicht stetig und in allen irrationalen Punkten stetig ist.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.6 Sei $a = \frac{n}{m}$, also $f(a) = \frac{1}{m}$. In jeder Umgebung **12/5/6/2**
von a existiert eine Folge (a_i) von irrationalen Zahlen a_i mit $a_i \to a$ und $0 = f(a_i) = \frac{n_i}{m_i} \not\longrightarrow f(a) = \frac{1}{m}$.
f ist also in a nicht stetig.

Sei a irrational, $a_i \to a$ und $\varepsilon > 0$. Für rationale $a_i = \frac{n_i}{m_i}$ gilt: $f(a_i) = \frac{1}{m_i} < \varepsilon$ für fast alle i. Für irrationale a_i gilt: $f(a_i) = 0 < \varepsilon$. Hieraus folgt die Stetigkeit von f in a.

Lösung zu Aufgabe 5.6 Sei $a := \frac{n}{m}$ rational, also $f(a) = \frac{1}{m}$ (> 0). **12/5/6/3**

Da es in jeder Umgebung von a unendlich viele irrationale Zahlen gibt, existiert eine Folge (a_i) von irrationalen Zahlen mit $a_i \to a$.

Wegen $f(a_i) = 0$ für alle i konvergiert die Folge $(f(a_i))$ nicht gegen $f(a)$.
Folglich ist f an der Stelle a nicht stetig.

Es sei nun a irrational und $a_i \to a$. Weiterhin sei $c > 0$ (beliebig) und $\varepsilon > 0$.
Offenbar gibt es nur endlich viele $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Folglich existieren auch nur endlich viele $\frac{n}{m} \in (0,c)$, so daß $m \leq \frac{1}{\varepsilon}$ (denn $\frac{n}{m} < c \iff n < mc$), d.h., für fast alle $\frac{n}{m} \in (0,c)$ ist $m > \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{m} < \varepsilon$.
Für die irrationalen Folgeglieder a_i ist $f(a_i) = 0$. Für die rationalen $a_i := \frac{n_i}{m_i}$ (die alle in einem hinreichend großen Intervall $(0,c)$ liegen) ist $f(a_i) = \frac{1}{m_i} < \varepsilon$ für fast alle i.
Somit gilt: $f(a_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 = f(a)$; folglich ist f in a stetig.

5.7 Man untersuche, ob die folgenden Funktionen Umkehrfunktionen besitzen und bestimme sie ggf.: **12/5/7/1**

(a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ für $f : [0,\infty) \to [0,1)$,

(b) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ für $f : [0,\infty) \to [1,\infty)$,

(c) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ für $f : [\frac{1}{2},\infty) \to [0,\infty)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.7 In jedem Fall besitzt f eine Umkehrfunktion g. Es gilt: **12/5/7/2**

(a) $g(x) = -\frac{x}{x-1}$.

(b) $g(x) = \sqrt{\ln x}$.

(c) $g(x) = \frac{x^2+1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 5.7 Eine injektive Funktion $f : M \to N$ besitzt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : N \to M$. **12/5/7/3**
Für alle $x \in M$ und $y \in N$ gilt: $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$.
Um die Umkehrfunktion zu berechnen, ist also die Gleichung $f(x) = y$ nach x aufzulösen. Will man Funktion und Umkehrfunktion mit Hilfe des gleichen x-y-Koordinatensystems darstellen, sind die Variablen x, y in der Gleichung $f^{-1}(y) = x$ zu vertauschen, so daß sich für $f^{-1} := g$ als Umkehrfunktion $y = g(x)$ ergibt.

(a) Wir zeigen zunächst, daß f injektiv ist. Dazu seien $x_1, x_2 \geq 0$. Dann gilt:
$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\iff \frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+1} \\ &\iff x_1x_2 + x_1 = x_1x_2 + x_2 \\ &\iff x_1 = x_2. \end{aligned}$$
Wir lösen die Gleichung $f(x) = \frac{x}{x+1} = y$ nach x auf. Es ist
$$\begin{aligned} y = \frac{x}{x+1} &\iff y(x+1) - x = 0 \\ &\iff x(y-1) + y = 0 \\ &\iff x = -\frac{y}{y-1}. \end{aligned}$$
Durch $x = f^{-1}(y) = -\frac{y}{y-1}$ bzw. $y = g(x) = -\frac{x}{x-1}$ ist die gesuchte Umkehrfunktion von f gegeben.

(b) Offenbar ist f streng monoton wachsend, folglich ist f injektiv.
Wir lösen jetzt die Gleichung $y = \mathrm{e}^{x^2}$ nach x auf. Für $x \geq 0$ ist

$$y = \mathrm{e}^{x^2} \iff \ln y = x^2 \cdot \ln \mathrm{e} = x^2$$
$$\iff x = \sqrt{\ln y}. \quad (x \text{ ist nicht negativ !})$$

Also durch $x = f^{-1}(y) = \sqrt{\ln y}$ bzw. $y = g(x) = \sqrt{\ln x}$ ist die Umkehrfunktion von f gegeben.

(c) f ist wiederum streng monoton wachsend und somit injektiv. Für $x \geq \frac{1}{2}$ lösen wir die Gleichung $y = \sqrt{2x-1}$ nach x auf. Es ist

$$y = \sqrt{2x-1} \iff y^2 = 2x - 1 \iff x = \frac{y^2+1}{2}.$$

Durch $x = f^{-1}(y) = \dfrac{y^2+1}{2}$ bzw. $y = g(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$ ist die Umkehrfunktion von f dargestellt.

5.8 Berechnen Sie: **12/5/8/1**

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$, (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}\,\right)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.8 (a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6.$ **12/5/8/2**

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = 0.$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \frac{1}{2}.$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}\right) = 1.$

Lösung zu Aufgabe 5.8 **12/5/8/3**

(a) Für $x \neq 3$ ist $\dfrac{x^2-9}{x-3} = x+3$. Folglich ist

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6.$$

(b) Für $x \neq 0$ ist

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{x^2+1-1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}.$$

Dann gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{\lim_{x\to 0} x}{\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{0}{2} = 0.$$

(c) Für $x > 0$ ist

$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}.$$

Wegen $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

(d) Für $x > 0$ ist

$$\begin{aligned} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} &= \frac{x+\sqrt{x}-(x-\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}} \\ &= \frac{2\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}} = 1.$$

5.9 (a) Zeigen Sie, daß die Funktionen **12/5/9/1**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[n]{x} && \text{mit} \quad f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, \\ g(x) &= \log_a x && \text{mit} \quad g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, \\ h(x) &= \arcsin x && \text{mit} \quad h:[-1,1]\to\mathbb{R} \end{aligned}$$

stetig sind.

(b) In welchem Intervall ist $f(x) = \sqrt[n]{|\log_a(\arcsin x)|}$ stetig und warum ?

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.9 (a) Da die Umkehrfunktionen von (injektiven) stetigen Funktionen stetig sind, **12/5/9/2**

gilt die Behauptung.

(b) Die Verkettung stetiger Funktionen ist stetig. Folglich ist f in $D(f)$ stetig und es ist $D(f) = (0,1]$.

Lösung zu Aufgabe 5.9 **12/5/9/3**

(a) Wir benutzen folgende Eigenschaft:
Ist $f: M \to N$ injektiv und stetig, dann ist $f^{-1}: N \to M$ stetig.

(α) Wir betrachten die Funktion $f_1 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $f_1(x) = x^n$.
Offenbar ist f_1 injektiv und stetig. Folglich ist auch $f = f_1^{-1}$ stetig.

(β) Für $0 < a \neq 1$ sei $g_1(x) = a^x$. Dann ist $g_1 : (-\infty,\infty) \to (0,\infty)$ streng monoton (also injektiv) und stetig. Somit ist auch $g(x) = \log_a x$ stetig.

(γ) Es sei $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ und $h_1(x) = \sin x$. Dann ist $h_1 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ injektiv und stetig und somit $h(x) = \arcsin x$ stetig.

(b) Wir bestimmen zunächst den Definitionsbereich $D(f)$ von f.
Es ist $D(\arcsin) = [-1, 1]$ und der Wertebereich von arcsin ist $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Weiterhin ist $D(\log_a) = (0, \infty)$. Damit ergibt sich $D(\log_a \circ \arcsin) = (0, 1]$. Das Vorzeichen von $\log_a(\arcsin x)$ spielt keine Rolle, da unter der Wurzel der Betrag genommen wird. Somit erhält man $D(f) = (0, 1]$. In diesem Intervall ist f auch stetig, da die Verkettung stetiger Funktionen stetig ist.

5.10 Es sei $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x^2 < 2, \\ 1 & \text{für } x^2 > 2 \end{cases}$ mit $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. **12/5/10/1**
Beweisen Sie, daß f stetig ist in $\mathbb{Q}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.10 Mit Hilfe der ε-δ-Definition der Stetigkeit läßt sich die Stetigkeit von f an jeder Stelle $r \in \mathbb{Q}$ zeigen. Dabei ist die Fallunterscheidung $|r| < \sqrt{2}$ bzw. $|r| > \sqrt{2}$ hilfreich. **12/5/10/2**

Lösung zu Aufgabe 5.10 Sei r rational und $\varepsilon > 0$. **12/5/10/3**
1. Fall: $r < -\sqrt{2}$. Dann ist $r^2 > 2$ und somit $f(r) = 1$.
Wir wählen $\delta > 0$, jedoch so klein, daß $r + \delta < -\sqrt{2}$. Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt dann:

$$\text{Wenn } |x - r| < \delta, \text{ so } |f(x) - f(r)| = 1 - 1 = 0 < \varepsilon.$$

2. Fall: $-\sqrt{2} < r < \sqrt{2}$, also $r^2 < 2$ und somit $f(r) = 0$.
Es sei $\delta > 0$, jedoch so klein, daß $-\sqrt{2} < r - \delta$ und $r + \delta < \sqrt{2}$. Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\text{Wenn } |x - r| < \delta, \text{ so } |f(x) - f(r)| = 0 - 0 = 0 < \varepsilon.$$

3. Fall: $\sqrt{2} < r$, also $r^2 > 2$ und damit $f(r) = 1$.
Sei $\delta > 0$ und $\sqrt{2} < r - \delta$. Für $x \in \mathbb{Q}$ erhält man:

$$\text{Wenn } |x - r| < \delta, \text{ so } |f(x) - f(r)| = 1 - 1 = 0 < \varepsilon.$$

Folglich ist f an allen Stellen $r \in \mathbb{Q}$ stetig.

5.11 Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen in a stetig sind: **12/5/11/1**

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} & \text{für } x \neq -1; 2, \\ \dfrac{4}{3} & \text{für } x = -1, \quad a = -1, \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0, \quad a = 0. \end{cases}$

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.11 (a) Es ist $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$; folglich ist f in -1 stetig. **12/5/11/2**
(b) Für $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$ gilt: $x_n \to 0$, aber $f(x_n) \not\to f(0)$.
Folglich ist f in 0 nicht stetig.

Lösung zu Aufgabe 5.11 **12/5/11/3**

(a) Für $x \neq 1; 2$ ist $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{x-3}{x-2}$.

Für $a = -1$ gilt dann:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2-2x-3}{x^2-x-2} = \lim_{x\to a} \frac{x-3}{x-2} = \tfrac{4}{3} = f(a).$$

Damit ist f an der Stelle $a = -1$ stetig.

(b) Wir betrachten die Folge (x_n) mit $x_n := \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$, $\quad n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ und } f(x_n) = \cos\tfrac{1}{x_n} = \cos(\tfrac{\pi}{2}+n\pi) = 0 \text{ für alle } n.$$

Also $f(x_n) = 0 \neq 1 = f(0)$. Folglich ist f an der Stelle $a = 0$ nicht stetig.

5.12 Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen an der Stelle a einen Grenzwert besitzen: **12/5/12/1**

(a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x < 0, \\ 2^x & \text{für } x \geq 0, \quad a = 0, \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{e^x-1}}{x} & \text{für } x > 0, \\ 1 & \text{für } x = 0, \quad a = 0, \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}\cdot x) & \text{für } |x| \leq 1, \\ |x-1| & \text{für } |x| > 1, \quad a = 1,\ a = -1. \end{cases}$

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.12 (a) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. **12/5/12/2**

(b) Es ist $\dfrac{\sqrt{e^x-1}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^{i-2}}{i!}}$.

Nach dem Lemma 4/5/7/2 existiert der Limes der Reihe.

Folglich existiert der Limes von f an der Stelle 1 nicht.

(c) An der Stelle -1 besitzt f keinen Grenzwert; an der Stelle 1 ist der Grenzwert 0.

Lösung zu Aufgabe 5.12 **12/5/12/3**

(a) Es genügt nachzuweisen, daß f an der Stelle a den links- und rechtsseitigen Grenzwert $f(a)$ besitzt. Für $x < 0$ ist

$$f(x) = x+1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = 2^0 = f(0),$$

und für $x > 0$ ist

$$f(x) = 2^x \xrightarrow[x\to 0]{} 2^0 = f(0).$$

Folglich besitzt f an der Stelle a den Grenzwert $f(0) = 1$.

(b) (Für $x < 0$ ist $e^x < 1$ und somit $e^x - 1 < 0$. Damit ist $f(x)$ für $x < 0$ nicht definiert.)

Es sei $x > 0$. Dann ist

$$\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2}(\mathrm{e}^x-1)} = \sqrt{\frac{1}{x^2}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{i!}} = \sqrt{\frac{1}{x}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{x^{i-2}}{i!}}\,.$$

Nach dem Lemma 4/5/7/2 ist $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{i=2}^{\infty}\frac{x^{i-2}}{i!} = \frac{1}{2}$;

weiterhin ist $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$ und somit $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{x} = \infty$.
An der Stelle $a=0$ existiert der Limes nicht.

(c) Es sei zunächst $a=-1$. Für $x<-1$ ist

$$f(x) = |x-1| = -(x-1) = 1-x \xrightarrow[x\to -1]{} 2;$$

für $-1<x$ und $|x|<1$ ist

$$f(x) = \cos(\tfrac{\pi}{2}\cdot x) \xrightarrow[x\to -1]{} \cos(-\tfrac{\pi}{2}) = 0.$$

Folglich besitzt f an der Stelle $a=-1$ keinen Grenzwert.
Es sei nun $a=1$. Ist $|x|<1$, so ist

$$f(x) = \cos(\tfrac{\pi}{2}\cdot x) \xrightarrow[x\to 1]{} \cos\tfrac{\pi}{2} = 0 = f(1);$$

für $x>1$ ist

$$f(x) = |x-1| = x-1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0.$$

Folglich besitzt f an der Stelle $a=1$ den Grenzwert 0.

5.13 Untersuchen Sie die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$ auf Stetigkeit. **12/5/13/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.13 Es ist $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } x<0,\\ 0, & \text{für } x=0,\\ 1, & \text{für } x>0.\end{cases}$ **12/5/13/2**

Damit ist f in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig und in 0 unstetig.

Lösung zu Aufgabe 5.13 Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor. **12/5/13/3**

1. Fall: $x<0$. Es ist

$$\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}} = \frac{n^{2x}-1}{n^{2x}+1},$$

und wegen $2x<0$ ist $n^{2x} \xrightarrow[n\to\infty]{} = 0$. Folglich erhält man

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2x}-1}{n^{2x}+1} = -1.$$

2. Fall: $x=0$; also $\frac{n^0-n^0}{n^0+n^0} = 0$ und somit $f(0)=0$.

3. Fall: $x>0$. Es ist

$$\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}} = \frac{1-n^{-2x}}{1+n^{-2x}}.$$

Wegen $-2x < 0$ ist $n^{-2x} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Folglich ist

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^{-2x}}{1+n^{-2x}} = 1.$$

Damit ist f offenbar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig und an der Stelle 0 unstetig.

5.14 Es sei $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}$. 12/5/14/1

(a) Geben Sie Definitionsbereich und Wertebereich von f an.

(b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten des Definitionsbereiches die Funktion f stetig bzw. nicht stetig ist.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.14 (a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $W(f) = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. 12/5/14/2

(b) f ist in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ stetig und in $\{-1, 1\}$ nicht stetig (in -1 nicht definiert).

Lösung zu Aufgabe 5.14 Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor. 12/5/14/3

1. Fall: $|x| < 1$. Dann ist $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und somit

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = 1.$$

2. Fall: $|x| > 1$. Hierfür gilt: $|x^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ und somit $\frac{1}{1+x^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Folglich ist

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = 0.$$

3. Fall: $x = -1$. Für ungerade n ist $x^n = -1$ und somit $\frac{1}{1+x^n}$ nicht definiert; also $-1 \notin D(f)$.

4. Fall: $x = 1$. Hierfür ist $\frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{2}$, also $f(1) = \frac{1}{2}$.

(a) Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und der Wertebereich $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

(b) Für $|x| < 1$ bzw. $|x| > 1$ ist f konstant 1 bzw. konstant 0. Folglich ist f dort stetig.
An der Stelle $x = 1$ besitzt f keinen Grenzwert (links- und rechstsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein); an der Stelle $x = -1$ ist f nicht definiert. Somit ist f in $\{-1, 1\}$ nicht stetig.

5.15 (a) Es sei $f(x) = \sqrt{x^2-2} + \sqrt[3]{3x+4}$ mit $f : [\sqrt{2}, \infty) \to \mathbb{R}$. 12/5/15/1
Beweisen Sie, daß es ein $a \in [\sqrt{2}, \infty)$ gibt, so daß $f(a) = 7$.

(b) Beweisen Sie: Ist $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig, dann gibt es ein $x \in [a, b]$, so daß $f(x) = x$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.15 (a) f ist stetig und $f(2) < 7 < f(8)$. Mit dem Zwischenwertsatz erhält man die Behauptung. 12/5/15/2

(b) Für $f(a) = a$ oder $f(b) = b$ ist die Behauptung trivial.
Sei nun $f(a) > a$ (für $f(b) < b$ verläuft der Beweis analog) und M eine Menge, die wie folgt definiert ist:
$x \in M \iff x \in [a, b]$ und für jedes y mit $a \leq y \leq x$ ist $f(y) > y$.
Auf M wird der Satz von der oberen Grenze angewendet.

Lösung zu Aufgabe 5.15 **12/5/15/3**

(a) (Wir benutzen den Zwischenwertsatz.) Es ist

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt[3]{3\sqrt{2} + 4} < \sqrt[3]{6 + 4} < 7.$$

Weiterhin ist

$$f(8) = \sqrt{62} + \sqrt[3]{28} > \sqrt{49} = 7.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein a mit $\sqrt{2} < a < 8$, so daß $f(a) = 7$.

(b) Wenn $f(a) = a$ oder $f(b) = b$, dann gilt die Behauptung.
Es sei nun $f(a) \neq a$ und $f(b) \neq b$. Wegen $f : [a, b] \to [a, b]$ ist dann $f(a) > a$ und $f(b) < b$. Wir definieren eine Teilmenge M von $[a, b]$ wie folgt:

$$x \in M \iff x \in [a, b] \text{ und für jedes } y \text{ mit } a \leq y \leq x \text{ ist } f(y) > y.$$

Wegen $a \in M$ ist M nicht leer und offenbar durch b nach oben beschränkt. Nach dem Satz von der oberen Grenze existiert ein $c \in [a, b]$, so daß c kleinste obere Schranke von M ist.
Behauptung: $f(c) = c$.
Sei (x_n) eine Folge mit $x_n < c$ und $x_n \to c$.
(Gäbe es eine solche Folge nicht, so wäre $c = a$. Nach Definition von M existiert dann eine Folge (y_n) mit $a = c \leq y_n \leq b$, $y_n \to c$ und $f(y_n) \leq y_n$. Folglich ist $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, Widerspruch !)
Nach Voraussetzung ist $x_n < f(x_n)$ und somit

$$c = \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c).$$

Offenbar ist dann $c < b$, denn $f(b) < b$.
Nach Definition von M gibt es für jedes $x > c$ ein y mit $c < y \leq x$, so daß $f(y) \leq y$. Wir bilden jetzt eine Folge (y_n) mit $c < y_n \leq b$, $y_n \to c$ und $f(y_n) \leq y_n$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(c) \leq \lim_{n\to\infty} y_n = c.$$

Insgesamt erhält man also $c \leq f(c) \leq c$ und somit $f(c) = c$.

5.16 Unter Benutzung von $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ berechne man: **12/5/16/1**

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x}$, $a \neq 0$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$.
[Hinweis: $\cos 3x = \cos(5x - 2x)$, $\cos 7x = \cos(5x + 2x)$.]

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$.
[Hinweis: Man führe eine neue Variable $y = \arctan x$ ein.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.16 (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a.$ **12/5/16/2**

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2} = 20.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$

Lösung zu Aufgabe 5.16 **12/5/16/3**

(a) Es ist $\frac{\sin ax}{x} = a\cdot\frac{\sin ax}{ax}$ und $x \to 0 \iff y := ax \to 0$. Folglich gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{x\to 0} a\cdot\frac{\sin ax}{ax} = a\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = a.$$

(b) (Falls das Additionstheorem $\cos u - \cos v = -2\cdot\sin\frac{u+v}{2}\cdot\sin\frac{u-v}{2}$ schon zur Verfügung steht, kann auch dies zur Lösung der Aufgabe benutzt werden.)

Aufgrund des Hinweises ist

$$\begin{aligned}
\frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2} &= \frac{1}{x^2}\big(\cos(5x-2x) - \cos(5x+2x)\big)\\
&= \frac{1}{x^2}(\cos 5x\cdot\cos 2x + \sin 5x\cdot\sin 2x - \cos 5x\cdot\cos 2x + \sin 5x\cdot\sin 2x)\\
&= \frac{2}{x^2}\cdot\sin 5x\cdot\sin 2x\\
&= 20\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x} \xrightarrow[x\to 0]{} 20.
\end{aligned}$$

Also $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2} = 20.$

(c) Wir setzen $y := \arctan x$ und somit $x = \tan y$.
Es gilt $x \to 0 \iff \arctan x = y \to 0$. Dann ist

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{y}{\tan y} = \frac{y}{\sin y}\cdot\cos y.$$

Wegen $\frac{\sin y}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$ ist auch $\frac{y}{\sin y} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$. Folglich gilt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim_{y\to 0}\cos y = 1.$$

5.17 Es sei f an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig, und es sei $f(a) > 0$. Zeigen Sie **12/5/17/1**

(a) mit Hilfe der Stetigkeitsdefinition,

(b) mit Hilfe des Kriteriums von Satz 5.2:

Es existiert eine Umgebung U von a, so daß für alle $x \in U \cap D(f)$ gilt: $f(x) > 0$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.17 (a) Für $\varepsilon := \frac{f(a)}{2}$ existiert aufgrund der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, so daß **12/5/17/2**

$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Hieraus folgt die Behauptung.

(b) Indirekter Beweis.

Lösung zu Aufgabe 5.17 Sei f in a stetig und $f(a) > 0$. **12/5/17/3**

(a) Es sei $\varepsilon := \frac{f(a)}{2}$. Aufgrund der Stetigkeit von f in a existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in D(f)$:

$$\text{Wenn } |x-a| < \delta, \text{ so } |f(x) - f(a)| < \varepsilon = \frac{f(a)}{2}.$$

Damit gilt für alle $x \in U_\delta(a) \cap D(f)$:

$$f(a) - \varepsilon = \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) + \varepsilon = \frac{3}{2} f(a);$$

also $f(x) > 0$.

(b) Angenommen, für jede Umgebung U von a existiert ein $x \in U \cap D(f)$, so daß $f(x) \leq 0$. Wegen $f(a) > 0$ ist stets $x \neq a$. Folglich ist a ein Häufungspunkt der Menge dieser x. Aufgrund der Stetigkeit von f in a gilt: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Wegen $f(x) \leq 0$ ist somit auch $f(a) \leq 0$, ↯!

5.18 Es sei f in $[a,b]$ stetig, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ und **12/5/18/1**
$M = \{x : x \in [a,b] \text{ und } f(x) > 0\}$.
Zeigen Sie:

(a) Es existiert $\sup M$.

(b) $a < \sup M < b$.

(c) $f(\sup(M)) = 0$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.18 Man benutze Aufgabe 17 (a) und den Satz von der oberen Grenze. **12/5/18/2**

Lösung zu Aufgabe 5.18 Die Teilmenge $M \subseteq [a,b]$ ist nicht leer, da $a \in M$; weiterhin ist $b \notin M$. Nach Aufgabe 17 (a) existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $x \in M$ für alle x mit $a \leq x < a + \varepsilon$ und $x \notin M$ für alle x mit $b - \varepsilon < x \leq b$. **12/5/18/3**

Nach dem Satz von der oberen Grenze existiert $c := \sup M$.
Offenbar ist $a < a + \varepsilon \leq c \leq b - \varepsilon < b$. Dies beweist die Aufgabenteile (a) und (b).

(c) Nach Voraussetzung ist f an der Stelle c stetig.
Wegen $f(x) > 0$ für alle $x \in M$ gilt:

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x) = f(c) \geq 0.$$

Nach Definition von M existiert in jeder rechtsseitigen Umgebung $U_r(c) \setminus \{c\}$ ein x mit $f(x) \leq 0$. Daher gibt es eine Folge (x_n) mit $x_n > c$, $x_n \to c$ und $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(c) \leq 0$.
Insgesamt ist also $0 \leq f(x) \leq 0$ und damit $f(c) = 0$.

5.19 Beweisen Sie: **12/5/19/1**

(a) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

(b) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.19 Die Beweise erfolgen mit Hilfe von Cauchyprodukten der entsprechenden Reihen von Sinus und Cosinus. **12/5/19/2**

Lösung zu Aufgabe 5.19 **12/5/19/3**

(a) Nach Definition von sin gilt:

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(x+y)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\Big(\sum_{\nu=0}^{n}\tbinom{2n+1}{\nu}x^{\nu}y^{2n+1-\nu}\Big) := (\star).\end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}&\sin x\cos y+\cos x\sin y\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\cdot(-1)^j\frac{y^{2j}}{(2j)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}(-1)^i\frac{x^{2i}}{(2i)!}\cdot(-1)^j\frac{y^{2j+1}}{(2j+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{i+j=n}\frac{x^{2i+1}y^{2j}}{(2i+1)!(2j)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{i+j=n}\frac{x^{2i}y^{2j+1}}{(2i)!(2j+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{i+j=n}\Big(\frac{x^{2i+1}y^{2j}}{(2i+1)!(2j)!}+\frac{x^{2i}y^{2j+1}}{(2i)!(2j+1)!}\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sum_{i+j=n}\Big(\tbinom{2n+1}{2i+1}x^{2i+1}y^{2j}+\tbinom{2n+1}{2i}x^{2i}y^{2j+1}\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\sum_{\nu=0}^{n}\tbinom{2n+1}{\nu}x^{\nu}y^{2n+1-\nu} = (\star)\end{aligned}$$

Folglich gilt die Behauptung.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(x+y)^{2n}}{(2n)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\Big(\sum_{\nu=0}^{n}\tbinom{2n}{\nu}x^{\nu}y^{2n-\nu}\Big) := (\star\star).\end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}&\cos x\cos y+\sin x\sin y\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}(-1)^i\frac{x^{2i}}{(2i)!}\cdot(-1)^j\frac{y^{2j}}{(2j)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\cdot(-1)^j\frac{y^{2j+1}}{(2j+1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{i+j=n}\frac{x^{2i}y^{2j}}{(2i)!(2j)!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{i+j=n}\frac{x^{2i+1}y^{2j+1}}{(2i+1)!(2j+1)!}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{i+j=n} \binom{2n}{2i} x^{2i} y^{2j} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!} \sum_{i+j=n} \binom{2(n+1)}{2i+1} x^{2i+1} y^{2j+1} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{i+j=n} \binom{2n}{2i} x^{2i} y^{2j} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{i+j=n} \binom{2n}{2i+1} x^{2i+1} y^{2j+1} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{i+j=n} \left(\binom{2n}{2i} x^{2i} y^{2j} + \binom{2n}{2i+1} x^{2i+1} y^{2j+1} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n}{\nu} x^{\nu} y^{2n-\nu} := (\star\star).
\end{aligned}
$$

Damit gilt auch diese Behauptung.

5.20 Lösen Sie die folgenden Gleichungen: **12/5/20/1**

(a) $2^{3^x} = 3^{4^x}$,

(b) $2(\log_5 x)^2 + \log_5(x^3) - 2 = 0$,

(c) $15^x + 9^x = 25^x$ [Hinweis: Man dividiere durch 25^x.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.20 (a) Durch Anwendung des Logarithmus (auf beiden Seiten der Gleichung) erhält **12/5/20/2**

man schließlich $x = \dfrac{\ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)}{\ln \frac{3}{4}} \approx -1,6009.$

(b) Durch die Substitution $y := \log_5 x$ erhält man eine quadratische Gleichung; als Lösungsmenge ergibt sich $\{\sqrt{5}, \frac{1}{25}\}$.

(c) Es entsteht eine quadratische Gleichung in $\left(\frac{3}{5}\right)^x$;

als Lösungsmenge ergibt sich $x = \dfrac{\ln \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}{\ln \frac{3}{5}}$.

Lösung zu Aufgabe 5.20 **12/5/20/3**

(a) Da $\ln$ injektiv ist, gilt:

$$
\begin{aligned}
2^{3^x} = 3^{4^x} &\iff 3^x \ln 2 = 4^x \ln 3 \\
&\iff \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{\ln 3}{\ln 2} \\
&\iff x \cdot \ln \frac{3}{4} = \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right) \\
&\iff x = \frac{\ln(\frac{\ln 3}{\ln 2})}{\ln \frac{3}{4}} \approx -1,6009.
\end{aligned}
$$

(b) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
2(\log_5 x)^2 + \log_5(x^3) - 2 = 0 &\iff (\log_5 x)^2 + \frac{3}{2}\cdot\log_5 x - 1 = 0 \\
&\iff \log_5 x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}} \\
&\iff \log_5 x = \frac{1}{2} \text{ oder } \log_5 x = -2.
\end{aligned}
$$

Folglich ist $x = 5^{\frac{1}{2}}$ oder $x = 5^{-2}$ und somit $\{\sqrt{5}, \frac{1}{25}\}$ die Lösungsmenge.

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned} 15^x + 9^x = 25^x &\iff 9^x + 15^x - 25^x = 0 \\ &\iff \left(\tfrac{3}{5}\right)^{2x} + \left(\tfrac{3}{5}\right)^x - 1 = 0 \\ &\iff \left(\tfrac{3}{5}\right)^x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}+1} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Wegen $\left(\frac{3}{5}\right)^x > 0$ ist $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ keine Lösung; also

$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ und somit $x = \dfrac{\ln \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}{\ln \frac{3}{5}}$.

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.1 Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit an der Stelle $(0,0)$, wobei: **12/6/1/1**

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.1 (a) Für eine Nullfolge (x_i, x_i) mit $x_i \neq 0$ ist $f(x_i,x_i) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$. **12/6/1/2**

Damit ist f in $(0,0)$ nicht stetig.

(b) Für $|x|,|y| \leq 1$ ist $x^2 \cdot y^2 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$ und somit $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq 1$.

Daraus folgt die Stetigkeit von f in $(0,0)$.

Lösung zu Aufgabe 6.1 **12/6/1/3**

(a) Wir betrachten eine Folge (x_i) mit $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i \neq 0$ und $x_i \to 0$.
Dann ist durch $\overline{x}_i = (x_i, x_i)$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}^2$ definiert, und es ist
$f(x_i,x_i) = \dfrac{x_i^2}{2x_i^2} = \dfrac{1}{2}$ für jedes i. Es gilt also **nicht** $f(x_i,x_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} f(0,0) = 0$.
Folglich ist f in $(0,0)$ unstetig.

(b) Es ist $\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} = xy \cdot \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} := (\star)$.
1. Fall: $(x = 0$ und $y \neq 0)$ oder $(x \neq 0$ und $y = 0)$.
Dann ist $(\star) = 0$.
2. Fall: $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Es sei o.B.d.A. $|x|,|y| \leq 1$.
Dann ist $y^2 \leq 1$ und somit $x^2y^2 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$, also $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq 1$.
Folglich gilt für beide Fälle: $\lim\limits_{x,y\to 0} f(x,y) = 0 = f(0,0)$,
somit ist f in $(0,0)$ stetig.

6.2 Zeigen Sie: Ist $(\overline{x}_i)$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, $\overline{x}_i = (x_{1i}, \ldots, x_{ni})$, und $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, dann gilt: **12/6/2/1**
$(\overline{x}_i)$ konvergiert gegen $\overline{a}$ gdw (x_{ki}) gegen a_k konvergiert, $k = 1, \ldots, n$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.2 Beweis durch einfache Abschätzungen. **12/6/2/2**

Lösung zu Aufgabe 6.2 Es sei $(\overline{x}_i) = (x_{1i}, \ldots x_{ni})$ und $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. **12/6/2/3**
$(\longleftarrow)$ Sei $\varepsilon > 0$ und $x_{ik} \to a_k$ für $k = 1, \ldots, n$.
Nach Definition der Konvergenz existieren m_k, so daß für jedes $i \geq m_k$ gilt:
$|x_{ik} - a_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$; also $(x_{ik} - a_k)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}$.

Folglich ist $|\overline{x}_i - \overline{a}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - a_k)^2} < \varepsilon$ für $i \geq \max\{m_1, \ldots, m_k\}$.

$(\longrightarrow)$ Sei $\varepsilon > 0$ und $\overline{x}_i \to \overline{a}$. Für fast alle i gilt dann:

$|\overline{x}_i - \overline{a}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - a_k)^2} < \varepsilon$, also erst recht $\sqrt{(x_{ik} - a_k)^2} = |x_{ik} - a_k| < \varepsilon$
für $k = 1, \ldots, n$. Somit gilt: $x_{ik} \to a_k$.

6.3 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: **12/6/3/1**

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}$

ist in $(0,0)$ nicht stetig.

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin(xy) & \text{für } x \neq 0, \\ y & \text{für } x = 0 \end{cases}$

ist in jedem Punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ stetig.

[Man benutze die Ungleichung: $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ für „kleine“ x.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.3 (a) Die Untersuchung des Grenzwertes für $x = 0$, $y \neq 0$ und $y \to 0$ liefert die Unstetigkeit von f in $(0,0)$. **12/6/3/2**

(b) Mit dem Hinweis und einer geeigneten Fallunterscheidung für a, b ist der Beweis leicht zu führen.

Lösung zu Aufgabe 6.3 **12/6/3/3**

(a) Für $x = 0$ und $y \neq 0$ ist $f(x,y) = f(0,y) = 0$ und somit $f(0,y) \xrightarrow[y \to 0]{} 0 \neq 1 = f(0,0)$. Folglich ist f in $(0,0)$ unstetig.

(b) Es gelte: $x_i \to a$ und $y_i \to b$. Wir nehmen folgende Fallunterscheidung vor:
(α) $a \neq 0$ (o.B.d.A. $x \neq 0$) und $b = 0$; also $x_i y_i \to 0$, d.h., $x_i y_i$ ist „klein“.
Dann gilt:

$$|f(x_i, y_i)| = \left|\frac{1}{x_i} \cdot \sin(x_i y_i)\right| \leq \left|\frac{1}{x_i}\right| \cdot |x_i y_i| = |y_i| \xrightarrow[i \to \infty]{} 0 = b = |f(a,0)|.$$

Folglich ist f in $(a,0)$ stetig.

(β) $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Da rationale Funktionen und die Sinusfunktion stetig sind und rationale Operationen von stetigen zu stetigen Funktionen führen, ist f in (a, b) stetig.

(γ) $a = 0$ und $b \neq 0$.
Für $x_i = 0$ ist $f(x_i, y_i) = y_i$; für $x_i \neq 0$ ist o.B.d.A. $x_i y_i$ „klein“ und $y_i \neq 0$.
Folglich gilt: $|f(x_i, y_i)| \leq |y_i|$ (nach Teil α) und

$$\begin{aligned} |f(x_i, y_i)| &= |y_i| \cdot \frac{1}{|x_i y_i|} \cdot |\sin(x_i y_i)| \\ &\geq |y_i| \cdot \left| \frac{1}{\tan(x_i y_i)} \right| \cdot |\sin(x_i y_i)| = |y_i| \cdot |\cos(x_i y_i)|. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also: $|y_i| \cdot |\cos(x_i y_i)| \leq |f(x_i, y_i)| \leq |y_i|$.
Wegen $\cos(x_i, y_i) \xrightarrow[i \to \infty]{} 1$ erhält man $\lim\limits_{i \to \infty} f(x_i, y_i) = b = f(0, b)$.
Folglich ist f in $(0, b)$ stetig.

6.4 Es sei f die durch $f(x, y) = x^y$ definierte Funktion, deren Definitionsbereich die Halbebene $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ ist. **12/6/4/1**
Zeigen Sie, daß f stetig ist, und untersuchen Sie diese Funktion auf Existenz und Größe von Grenzwerten in den Randpunkten des Definitionsbereiches.

[Hinweis: Definition von x^y beachten!]

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.4 Aus $f(x, y) = e^{y \cdot \ln x}$ ergibt sich die Stetigkeit von f. **12/6/4/2**

f besitzt in $(0, 0)$ keinen Grenzwert.
f besitzt an den Stellen $(0, b)$ mit $b > 0$ den Grenzwert 0 und
an den Stellen $(0, b)$ mit $b < 0$ den uneigentlichen Grenzwert ∞.

Lösung zu Aufgabe 6.4 Für $x > 0$ und y beliebig ist $f(x, y) = x^y = e^{y \cdot \ln x}$. **12/6/4/3**

Wir betrachten zunächst die Funktion $g(x, y) := y \cdot \ln x$.

Sei $(a, b) \in D(f)$, also $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ beliebig und $x_i \to a$ und $y_i \to b$ (o.B.d.A. $x_i > 0$ für alle i). Dann ist offenbar: $\lim\limits_{i \to \infty} = b \cdot \ln a$ und wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion auch $\lim\limits_{i \to \infty} f(x_i, y_i) = e^{b \cdot \ln a} = a^b = f(a, b)$.

Folglich ist f in (a, b) stetig.

Wir untersuchen jetzt die Grenzwerte in den Randpunkten des Definitionsbereiches, also in den Punkten $(0, b)$, $b \in \mathbb{R}$ beliebig.

1. Fall: $b = 0$.
Sei $x_i \to a$, $x_i > 0$ und $y_i \to 0$, speziell $y_i := 0$. Dann ist $y_i \cdot \ln x_i = 0$, also $f(x_i, y_i) = e^0 = 1$ für alle i.

Sei jetzt $y_i := \frac{1}{\ln x_i}$ $(\to 0)$. Dann ist $y_i \cdot \ln x_i = 1$ und somit $f(x_i, y_i) = e^1 = e$.

Folglich besitzt f in $(0, 0)$ keinen Grenzwert.

2. Fall: $b > 0$, $y_i \to b$ und o.B.d.A. $y_i > 0$.

Dann ist $y_i \cdot \ln x_i \xrightarrow[i\to\infty]{} -\infty$, also $f(x_i, y_i) = \mathrm{e}^{y_i \cdot \ln x_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$, d.h.,
f besitzt an der Stelle $(0, b)$ mit $b > 0$ den Grenzwert 0.
3. Fall: $b < 0$, $y_i \to b$ und o.B.d.A. $y_i < 0$.
Dann ist $y_i \cdot \ln x_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty$, also $f(x_i, y_i) = \mathrm{e}^{y_i \cdot \ln x_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty$.
f besitzt in $(0, b)$ für $b < 0$ den uneigentlichen Grenzwert ∞.

6.5 Es sei M die Menge aller Folgen $t = (t_0, t_1, t_2, \ldots)$ aus Nullen und Einsen. **12/6/5/1**
Für $s = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$ und $t = (t_0, t_1, t_2, \ldots)$ aus M sei

$$\varrho(s,t) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}. \qquad (\star)$$

Die Abbildung $f : M \to M$ sei definiert durch $f\Big((t_0, t_1, t_2, \ldots)\Big) = (t_1, t_2, t_3, \ldots)$.

(a) Zeigen Sie, daß die Reihe $(\star)$ konvergiert und ϱ eine Metrik auf M ist.
(b) Berechnen Sie den Abstand von $s = (0, 0, 0, \ldots)$ und $t = (0, 1, 0, 1, \ldots)$.
(c) Zeigen Sie
   i. Wenn $s_i = t_i$ für $i = 0, \ldots, n$, so $\varrho(s,t) \le \frac{1}{2^n}$.
   ii. Wenn $n \ge 1$ und $\varrho(s,t) \le \frac{1}{2^n}$, so $s_i = t_i$ für $i = 0, \ldots, n-1$.
(d) Untersuchen Sie, ob die Abbildung f stetig ist.

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.5 (a) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ ist eine konvergente Majorante von $\varrho(s,t)$. **12/6/5/2**

Die Eigenschaften der Metrik sind leicht nachzuweisen.

(b) $\varrho(s,t) = \frac{2}{3}$.
(c) Eigenschaft i) ist trivial; ii) zeigt man leicht indirekt.
(d) Für $\varepsilon > 0$ und $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ und $\delta := \frac{1}{2^{n+1}}$ gilt stets:
$\varrho(s,t) < \delta \implies \varrho(f(s), f(t)) < \varepsilon$.

Lösung zu Aufgabe 6.5 **12/6/5/3**

(a) Es ist $|s_i - t_i| = \begin{cases} 0, & \text{für } s_i = t_i, \\ 1, & \text{für } s_i \ne t_i, \end{cases}$ also $|s_i - t_i| \le 1$ für alle i.

Folglich ist $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ eine konvergente Majorante von $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$.
Offenbar ist $\varrho(s,t) \ge 0$. Für $s = t$ ist stets $s_i = t_i$ und damit $\varrho(s,t) = 0$.
Für $s \ne t$ ist $s_i \ne t_i$ für wenigstens ein i; also $\varrho(s,t) > 0$.
$\varrho(s,t) = \varrho(t,s)$ ist trivial.
Es sei nun $u := (u_0, u_1, u_2, \ldots) \in M$.
Aufgrund der Dreiecksungleichung für reelle Zahlen gilt: $|s_i - t_i| \le |s_i - u_i| + |u_i - t_i|$ für alle i. Wegen $|s_i - u_i| + |u_i - t_i| \le 2$ ist $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - u_i| + |u_i - t_i|}{2^i}$ konvergent.
Folglich gilt:

$$\varrho(s,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|s_i-t_i|}{2^i}\le\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|s_i-u_i|}{2^i}+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|u_i-t_i|}{2^i}=\varrho(s,u)+\varrho(u,t).$$

(b) Es ist $\varrho(s,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2i+1}}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^i=\frac{2}{3}$.

(c) Wenn $s_i=t_i$ für $i=0,\ldots,n$, so

$$\varrho(s,t)=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{|s_i-t_i|}{2^i}=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|s_{i+n+1}-t_{i+n+1}|}{2^i}\le\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2^n}.$$

Angenommen, $s_k\ne t_k$ für ein $k\in\{0,\ldots,n-1\}$, dann ist $|s_k-t_k|=1$ und somit $\varrho(s,t)\ge\frac{1}{2^k}\ge\frac{1}{2^{n-1}}$ im Widerspruch zu $\varrho(s,t)\le\frac{1}{2^n}$.

(d) Es sei $\varepsilon>0$, n so groß, daß $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$ und $\delta:=\frac{1}{2^{n+1}}$.
Wenn $\varrho(s,t)<\frac{1}{2^{n+1}}=\delta$, so $s_i=t_i$ für $i=1,\ldots,n+1$. Folglich ist

$$\varrho\Big(f(s),f(t)\Big)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|s_{i+1}-t_{i+1}|}{2^i}=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{|s_{i+1}-t_{i+1}|}{2^i}\le\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

6.6 Es sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Folgen von reellen Zahlen. Für zwei beliebige Elemente $x=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$, $y=(y_1,y_2,y_3,\ldots)$ von $\mathcal{F}$ sei $\varrho(x,y)$ wie folgt definiert: **12/6/6/1**

$$\varrho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}.$$

Beweisen Sie, daß ϱ eine Abbildung von $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften ist:

(a) $\varrho(x,y)\ge 0$ für alle $x,y\in\mathcal{F}$,

(b) $\varrho(x,y)=0$ genau dann, wenn $x=y$,

(c) $\varrho(x,y)=\varrho(x,y)$ für alle $x,y\in\mathcal{F}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ist eine konvergente Majorante von $\varrho(x,y)$. **12/6/6/2**
Die Eigenschaften (a) - (c) sind sehr leicht nachzuweisen.

Lösung zu Aufgabe 6.6 Wegen $\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}\le 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$. Folglich ist ϱ eine Abbildung von $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ in $\mathbb{R}$. **12/6/6/3**

(a) und (c) sind trivial.

(b) Wenn $x=y$, so ist $x_n=y_n$ für alle n und somit $\varrho(x,y)=0$.
Wenn $x\ne y$, so ist $x_n\ne y_n$ für wenigstens ein n, also $\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}>0$ und somit $\varrho(x,y)>0$.

6.7 Zeigen Sie für $\overline{x} = (x, y)$ und $\overline{0} = (0, 0)$: **12/6/7/1**

(a) $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = -\frac{1}{4}$,

(b) $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} = 1$,

(c) $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{0}} \dfrac{\sin(xy)}{x} = 0$.

[Für (b) und (c) benutze man die Ungleichung $|\sin x| \le |x| \le |\tan x|$ für „kleine“ x.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.7 (a) Der Bruch wird mit $2+\sqrt{xy+4}$ erweitert. **12/6/7/2**
(b) und (c) sind mit Hilfe des Hinweises leicht zu verifizieren.

Lösung zu Aufgabe 6.7 **12/6/7/3**

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} &= \frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})} \\ &= \frac{-xy}{xy(2+\sqrt{xy+4})} = \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}} \xrightarrow[\overline{x}\to\overline{0}]{} -\frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

(b) Es sei $x\cdot y \neq 0$ und $\overline{x} \to \overline{0}$, also $x\cdot y \to 0$ und somit ist $x\cdot y$ „klein“.
Nach dem Hinweis gilt:

$$\left|\frac{\sin(xy)}{xy}\right| \le \left|\frac{xy}{xy}\right| = 1 \quad \text{und} \quad \left|\frac{\sin(xy)}{xy}\right| \ge \left|\frac{\sin(xy)}{\tan(xy)}\right| = \cos(xy).$$

Also $|\cos(xy)| \le \left|\dfrac{\sin(xy)}{xy}\right| \le 1$ und $\cos(xy) \xrightarrow[\overline{x}\to\overline{0}]{} 1$, folglich ist $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} = 1$.

(c) 1. Fall: $y = 0$. Dann ist $\sin(xy) = 0$, also $\dfrac{\sin(xy)}{x} \xrightarrow[\overline{x}\to\overline{0}]{} 0$.

2. Fall: $y \neq 0$. Hierfür ist $\dfrac{\sin(xy)}{x} = y\cdot\dfrac{\sin(xy)}{xy} \xrightarrow[\overline{x}\to\overline{0}]{} 0\cdot 1 = 1$ (nach Aufgabe (b)).

6.8 Es sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ und $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ für $(x,y) \in M$. **12/6/8/1**
In welchen Punkten $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ besitzt f einen Limes?

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.8 f besitzt in jedem Punkt (a,b) den Limes $a+b$. **12/6/8/2**

Lösung zu Aufgabe 6.8 Für $x \neq y$ ist $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x-y} = x+y$. Folglich besitzt f **12/6/8/3**
in jedem Punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ den Limes $a+b$.

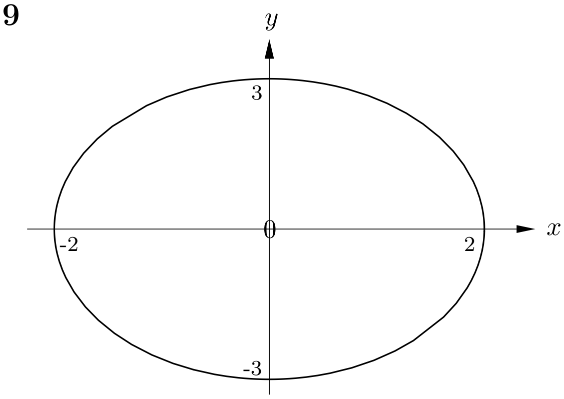
6.9 Skizzieren Sie (Zeichnung) den Verlauf der folgenden durch Parameterdarstellung **12/6/9/1**
gegebenen Kurven:

(a) $f(x) = (2\cos x, 3\sin x)$, $\quad 0 \le x \le 2\pi$.

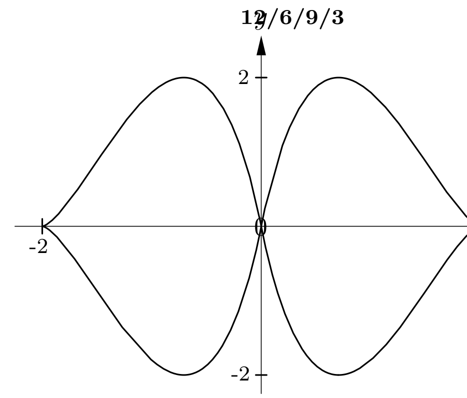
(b) $f(x) = (2\cos^3 x, 2\sin^3 x)$, $\quad 0 \le x \le 2\pi$. $\quad$ (Astroide).

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.9 Man berechne genügend viele Funktionswerte. **12/6/9/2**

Lösung zu Aufgabe 6.9 **12/6/9/3**



Aufgabe (a)



Aufgabe (b)

(Für die Skizzen sind genügend viele Funktionswerte zu berechnen.)

6.10 Man zeige mit Hilfe der Definition, daß die Funktion $f(x) = x^2$ in dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mit $0 \leq a < b$ gleichmäßig stetig ist. **12/6/10/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.10 Für $\varepsilon > 0$ leistet $\delta = \frac{\varepsilon}{2b}$ das Verlangte. **12/6/10/2**

Lösung zu Aufgabe 6.10 Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta := \frac{\varepsilon}{2b}$. Dann gilt für alle $x, y \in [a, b]$: **12/6/10/3**
Wenn $|x - y| < \delta$, so
$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq |x - y| \cdot (|x| + |y|) \leq |x - y| \cdot 2b < \delta \cdot 2b = \varepsilon$.

6.11 Es sei $(\mathbb{M}, \varrho)$ ein metrischer Raum und $a \in \mathbb{M}$. **12/6/11/1**
Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \varrho(x, a)$ in $\mathbb{M}$ stetig ist.
Ist f in $\mathbb{M}$ auch gleichmäßig stetig?

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.11 Für $\varepsilon > 0$ leistet $\delta = \varepsilon$ das Verlangte. **12/6/11/2**

Lösung zu Aufgabe 6.11 Für die Metrik in $\mathbb{M}$ gilt: **12/6/11/3**
$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) \Longrightarrow \varrho(x, y) - \varrho(x, z) \leq \varrho(z, y) = \varrho(y, z)$ und
$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \Longrightarrow \varrho(x, z) - \varrho(x, y) \leq \varrho(y, z)$.
Folglich gilt: $|\varrho(x, y) - \varrho(x, z)| \leq \varrho(y, z)$.
Dies wird benutzt, um die Stetigkeit von f in $\mathbb{M}$ nachzuweisen.
Dazu sei b ein Element aus $\mathbb{M}$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta := \varepsilon$.
Dann gilt: Wenn $\varrho(x, b) < \delta$, so
$|f(x) - f(b)| = |\varrho(x, a) - \varrho(b, a)| = |\varrho(a, x) - \varrho(a, b)| \leq \varrho(x, b) < \delta = \varepsilon$.
Folglich ist f in $\mathbb{M}$ stetig.

Offenbar ist f in $\mathbb{M}$ auch gleichmäßig stetig.

Denn für $\varepsilon > 0$ und $\delta := \varepsilon$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{M}$: Wenn $\varrho(x,y) < \varrho$, so $|f(x) - f(y)| = |\varrho(x,a) - \varrho(y,a)| = |\varrho(a,x) - \varrho(a,y)| \le \varrho(x,y) < \delta = \varepsilon$.

6.12 Es sei $(\mathbb{M}, \varrho)$ ein metrischer Raum, $a \in \mathbb{M}$ und $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \varrho(x,a)$ stetig in $\mathbb{M}$. Zeigen Sie: **12/6/12/1**

(a) Ist $M_0 \subseteq \mathbb{M}$ abgeschlossen, dann ist $A := \{x \in M_0 : f(x) = 0\}$ abgeschlossen.

(b) Für alle $b, c \in \mathbb{R}$ sind die Mengen $A_b := \{x \in \mathbb{M} : f(x) > b\}$ und $A_c := \{x \in \mathbb{M} : f(x) < c\}$ offen.

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.12 (a) Mit Hilfe der „Folgenstetigkeit“ zeigt man, daß ein Häufungspunkt von A zu A gehört. **12/6/12/2**

(b) Für $x_0 \in A_b$ genügt es, ein $\varepsilon > 0$ anzugeben mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq A_b$.
$\varepsilon := \varrho(x_0, a) - b$ leistet das Verlangte.
Die Offenheit von A_c erfolgt analog.

Lösung zu Aufgabe 6.12 **12/6/12/3**

(a) Sei M_0 abgeschlossen und a ein Häufungspunkt von A. Dann gibt es eine Folge (a_i) in A mit $a_i \to a$, also auch $a \in M_0$. Wegen $a_i \in A$ ist $f(a_i) = 0$ für alle i. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt: $0 = f(a_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} f(a)$. Folglich ist $f(a) = 0$ und somit $a \in A$, d.h. A ist abgeschlossen.

(b) Sei $b \in \mathbb{R}$, $A_b = \{x \in \mathbb{M} : f(x) > b\}$ und $x_0 \in A_b$.
Wir haben zu zeigen: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(x_0) \subseteq A_b$.
Wegen $x_0 \in A_b$ ist $f(x_0) = \varrho(x_o, a) > b$. Wir wählen $\varepsilon := \varrho(x_0, a) - b$.
Sei $x \in U_\varepsilon(x_0)$, also $\varrho(x, x_0) < \varrho(x_0, a) - b$.
Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt: $\varrho(a, x_0) \le \varrho(a, x) + \varrho(x, x_0)$.
Daher ist $\varrho(a, x_0) < \varrho(a, x) + \varrho(x_0, a) - b \implies b < \varrho(a, x) = \varrho(x, a)$.
Folglich ist $x \in A_b$.
Analog zeigt man den Rest der Behauptung.
Sei $c \in \mathbb{R}$, $A_c = \{x \in \mathbb{M} : f(x) < c\}$ und $x_0 \in A_c$.
Zu zeigen: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $U_\varepsilon(x_0) \in A_c$.
Wegen $x_0 \in A_c$ ist $f(x_0) = \varrho(x_o, a) < c$. Es sei $\varepsilon := c - \varrho(x_0, a)$ und $x \in U_\varepsilon(x_0)$, also $\varrho(x, x_0) < \varepsilon = c - \varrho(x_0, a)$. Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt:
$\varrho(a, x) \le \varrho(a, x_0) + \varrho(x_0, x) < \varrho(a, x_0) + c - \varrho(x_0, a) = c$.
Also $x \in A_c$. Damit gilt die Behauptung.

6.13 Welche der folgenden Mengen sind kompakt? **12/6/13/1**

(a) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(n - \frac{3}{5}, n + \frac{3}{5}\right)$ in $\mathbb{R}$,

(b) $A = \{0\} \cup \Big(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \big[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\big]\Big)$ in $\mathbb{R}$,

(c) $A = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in [0,1]\}$ in $\mathbb{R}^2$,

(d) $A = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$ in $\mathbb{R}^2$,

(e) $A = \{(x_1, x_2) : x_2 \leq 2x_1 + 1\}$ in $\mathbb{R}^2$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.13 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^k$. A ist kompakt $\iff$ A ist beschränkt und abgeschlossen. **12/6/13/2**

(a) A ist nicht beschränkt.

(b) A ist beschränkt und abgeschlossen.

(c) A ist beschränkt und abgeschlossen.

(d) A ist nicht abgeschlossen.

(e) A ist nicht beschränkt.

Lösung zu Aufgabe 6.13 Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ist kompakt gdw A in $\mathbb{R}^k$ beschränkt und abgeschlossen ist. **12/6/13/3**

(a) Offenbar ist A in $\mathbb{R}$ nicht beschränkt und damit nicht kompakt.

(b) Da A offensichtlich beschränkt ist, bleibt nur noch die Abgeschlossenheit nachzuweisen.
Sei a ein Häufungspunkt in A. Ist $a = 0$, so ist $a \in A$.
Sei nun $a \neq 0$ und (a_i) eine Folge in A mit $a_i \to a$. Wegen $a_i \in A$ ist $a_i \geq 0$, also o.B.d.A. $a_i > 0$.
Dann existiert ein n_0, so daß $a > \frac{1}{2n_0}$. Folglich ist auch $a_i > \frac{1}{2n_0}$ für fast alle i
$\Longrightarrow$ $a_i \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \cup \ldots \cup [\frac{1}{2n_0+1}, \frac{1}{2n_0}] := A_{n_0}$.
A_{n_0} ist eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen, also selbst abgeschlossen. Folglich ist $a \in A_{n_0} \subseteq A$ und somit A abgeschlossen.

(c) Offenbar ist A beschränkt in $\mathbb{R}^2$.
Sei (a,b) ein Häufungspunkt in A und $\big((x_i, y_i)\big)$ eine Folge in A mit $(x_i, y_i) \to (a,b)$. Wegen $x_i \to a$, $y_i \to b$ und $x_i, y_i \in [0,1]$ sind auch $a, b \in [0,1]$, also $(a,b) \in A$. Folglich ist A kompakt.

(d) Es ist $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ und $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$. Sei (x_i) eine Folge in $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ mit $x_i \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_i \to \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $y_i = x_i$. Dann ist $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ein Häufungspunkt von $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ und $\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$ ein Häufungspunkt von $\{(x_i, y_i) : i \in \mathbb{N}\} \subseteq A$, der nicht zu A gehört. Folglich ist A nicht abgeschlossen und damit nicht kompakt.

(e) A ist nicht beschränkt in $\mathbb{R}^2$ und daher nicht kompakt.

6.14 A, B seien Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: **12/6/14/1**

(a) Sind A und B kompakt, dann ist auch $A \cup B$ kompakt.

(b) Ist A kompakt und B abgeschlossen, dann ist $A \cap B$ kompakt.

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.14 Mit Hilfe der Definition von „kompakt“ und „abgeschlossen“ ist der Beweis leicht zu führen. **12/6/14/2**

Lösung zu Aufgabe 6.14 **12/6/14/3**

(a) $A \cup B$ ist beschränkt, denn nach Voraussetzung existieren $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so daß für alle $\overline{x} \in A$ und $\overline{y} \in B$ gilt: $|\overline{x}| \le c_1$ und $|\overline{y}| \le c_2$. Dann ist $|\overline{z}| \le \max\{c_1, c_2\}$ für alle $\overline{z} \in A \cup B$.
Es bleibt noch zu zeigen, daß $A \cup B$ abgeschlossen ist.
Ist $\overline{a}$ ein Häufungspunkt von $A \cup B$, dann liegen (nach Voraussetzung) in jeder Umgebung $U_\varepsilon(\overline{a})$ unendlich viele Elemente aus $A \cup B$. Folglich befinden sich in $U_\varepsilon(\overline{a})$ schon unendlich viele Elemente aus A oder unendlich viele Elemente aus B. Damit ist $\overline{a}$ ein Häufungspunkt von A oder von B, also $\overline{a} \in A$ oder $\overline{a} \in B$, d.h. $\overline{a} \in A \cup B$.

(b) Da Teilmengen von beschränkten Mengen wieder beschränkt sind, ist $A \cap B$ beschränkt.
Ist $\overline{a}$ ein Häufungspunkt von $A \cap B$, dann ist $\overline{a}$ insbesondere ein Häufungspunkt von A und von B. Wegen der Abgeschlossenheit von A und B ist $\overline{a} \in A$ und $\overline{a} \in B$, also $\overline{a} \in A \cap B$.

6.15 Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß A genau dann kompakt ist, wenn jede unendliche Teilmenge von A einen Häufungspunkt in A besitzt. **12/6/15/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.15 Sei o.B.d.A. die Menge A unendlich. **12/6/15/2**
($\longrightarrow$) Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß.
($\longleftarrow$) Beschränktheit und Abgeschlossenheit werden am einfachsten indirekt nachgewiesen.

Lösung zu Aufgabe 6.15 Für endliche Mengen ist die Behauptung trivial. Es sei A unendlich. **12/6/15/3**

($\longrightarrow$) Sei A kompakt, also beschränkt und abgeschlossen und U eine unendliche Teilmenge von A. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (6/1/24) besitzt U einen Häufungspunkt.

($\longleftarrow$) Angenommen, A ist nicht beschränkt, d.h., für jedes $c \in \mathbb{R}$ gibt es ein $a \in A$ mit $|a| > c$. Dann läßt sich (induktiv) eine unendliche Teilmenge $U := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ von A definieren, die keinen Häufungspunkt besitzt.

Sei $a_0 \in A$ beliebig. Nach Voraussetzung existieren $a_1 \in A$ mit $|a_1| > |a_0| + 1$, $a_2 \in A$ mit $|a_2| > |a_1| + 1, \ldots$. Dies widerspricht der Voraussetzung. Folglich ist A beschränkt.

Es bleibt noch die Abgeschlossenheit von A nachzuweisen.

Angenommen, A ist nicht abgeschlossen. Dann besitzt A einen Häufungspunkt $\overline{a}$, der nicht zu A gehört. Damit existiert eine Folge $(\overline{x}_i)$ in A mit $\overline{x}_i \to \overline{a}$. Wegen $\overline{x}_i \in A$ ist $\overline{x}_i \neq \overline{a}$ und somit $U := \{\overline{x}_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine unendliche Teilmenge von A. U besitzt nach Voraussetzung einen Häufungspunkt $\overline{b} \in U$. Dann gibt es eine Teilfolge $(\overline{x}_{i_j})$ von $(\overline{x}_i)$, die gegen $\overline{b}$ konvergiert. Folglich gilt: $\overline{x}_{i_j} \to \overline{b}$ und $\overline{x}_{i_j} \to \overline{a}$, also $\overline{b} = \overline{a}$ und somit $\overline{a} \in U \subseteq A$, $\lightning$!

6.16 Es sei $M = \{x : 0 \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathcal{U}$ ein System von Teilmengen von $\mathbb{R}$, so daß $\mathcal{U} = \{U(x) : U(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right)$ und $0 < x < 1\} \cup \{U_\varepsilon(0)\}$, wobei $\varepsilon > 0$ beliebig. **12/6/16/1**

(a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von M ist und wählen Sie ein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0$ von $\mathcal{U}$ aus, durch das M bereits überdeckt wird.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathcal{U}' = \{U(x) : U(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right)$ und $0 < x < 1\}$ eine Überdeckung von $M' = \{x : 0 < x < 1\}$ ist und daß es kein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0' \subseteq \mathcal{U}$ gibt, so daß M' durch $\mathcal{U}_0'$ überdeckt wird.

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.16 (a) Sei $a_0 > 0$ und $\frac{a_0}{2} < \varepsilon$. Weiterhin sei $k \in \mathbb{N}$ mit $ka_0 \geq 1$. Dann ist **12/6/16/2**

$U_0 := \{U_\varepsilon(0), U(a_0), \ldots, U(ka_0)\}$ ein überdeckendes endliches Teilsystem von $\mathcal{U}$.

(b) Der Beweis erfolgt leicht indirekt.

Lösung zu Aufgabe 6.16 **12/6/16/3**

(a) Sei $a \in M$. Wir zeigen, daß a Element wenigstens einer Menge aus $\mathcal{U}$ ist.
Ist $a = 0$, dann ist $a \in U_\varepsilon(0)$. Sei jetzt $a \neq 0$ und damit $0 < a \leq 1$.
Wir bilden $U(x)$ für $x = a$, also $U(a) = \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right) \implies a \in U(a)$.
Wir wählen jetzt eine endliche Überdeckung $\mathcal{U}_0$ aus.
Sei $a_0 > 0$ und a_0 so klein, daß $0 < \frac{a_0}{2} < \varepsilon$. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $ka_0 \geq 1$, also erst recht $\frac{3ka_0}{2} > 1$.
Wir betrachten $\mathcal{U}_0 := \{U_\varepsilon(0), U(a_0), U(2a_0), \ldots, U(ka_0)\}$. Offenbar ist $\mathcal{U}_0$ ein endliches Teilsystem von $\mathcal{U}$, durch das M überdeckt wird (denn die Intervalle „überlappen" sich).

(b) Für $a \in M'$ ist $a \in U(a) = \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$, folglich wird M' durch $\mathcal{U}'$ überdeckt.
Angenommen, es gibt ein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0'$ von $\mathcal{U}'$, durch das M' überdeckt wird. Unter den endlich vielen Elementen x, mit denen die Intervalle $U(x) := \left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right)$ gebildet sind, gibt es ein kleinstes x_0 (mit $0 < x_0 < 1$). Dann ist z.B. $\frac{x_0}{3} < \frac{x_0}{2}$. Folglich wird $\frac{x_0}{3}$ durch keine Menge aus $\mathcal{U}'$ überdeckt. Dies widerspricht der Annahme.

6.17 Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $g(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$, und $\mathfrak{k}$ die durch g definierte 12/6/17/1
Kurve in der Ebene. Betrachtet man zu jedem Punkt $\overline{x}$ von $\mathfrak{k}$ die ε-Umgebung $U_\varepsilon(\overline{x})$ mit $\varepsilon = \frac{1}{5}$, dann erhält man eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_\varepsilon(\overline{x}) : \overline{x} \in \mathfrak{k}\}$ von $\mathfrak{k}$.
Geben Sie endlich viele zu $\mathcal{U}$ gehörende Mengen an, die bereits $\mathfrak{k}$ vollständig überdecken (mit Zeichnung).

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.17 Sei $a_1 = \frac{1}{10}$, $a_2 = \frac{3}{10}$, $a_3 = \frac{5}{10}$, $a_4 = \frac{7}{10}$, $a_5 = \frac{9}{10}$ 12/6/17/2
und $a_6 = \frac{96}{100}$. Dann leistet $\mathcal{U}_0 = \{U_{\frac{1}{5}}(a_i, a_i^2) : i = 1, \ldots, 6\}$ das Verlangte.

Lösung zu Aufgabe 6.17 Der Abstand zweier beliebiger Punkte (a, a^2) und (t, t^2) 12/6/17/3
auf der Kurve $\mathfrak{k}$ ist gegeben durch

$$|(a, a^2) - (t, t^2)| = \sqrt{(a-t)^2 + (a^2 - t^2)^2} = |a - t| \cdot \sqrt{1 + (a+t)^2} := (\star).$$

Wir wählen jetzt Zahlen $a_1 = \frac{1}{10}$, $a_2 = \frac{3}{10}$, $a_3 = \frac{5}{10}$, $a_4 = \frac{7}{10}$, $a_5 = \frac{9}{10}$ und $a_6 = \frac{96}{100}$ aus und zeigen, daß $\mathcal{U}_0 := \{U_{\frac{1}{5}}(a_i, a_i^2) : i = 1, \ldots, 6\}$ die Kurve $\mathfrak{k}$ vollständig überdeckt.
Für a_i mit $i = 1, \ldots, 4$ gilt: Wenn $|a_i - t| < \frac{1}{10}$, so

$$(\star) = |a_i - t| \cdot \sqrt{1 + (a_i + t)^2} \leq \frac{1}{10} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{7}{10} + \frac{8}{10}\right)^2} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} < \frac{1}{5}.$$

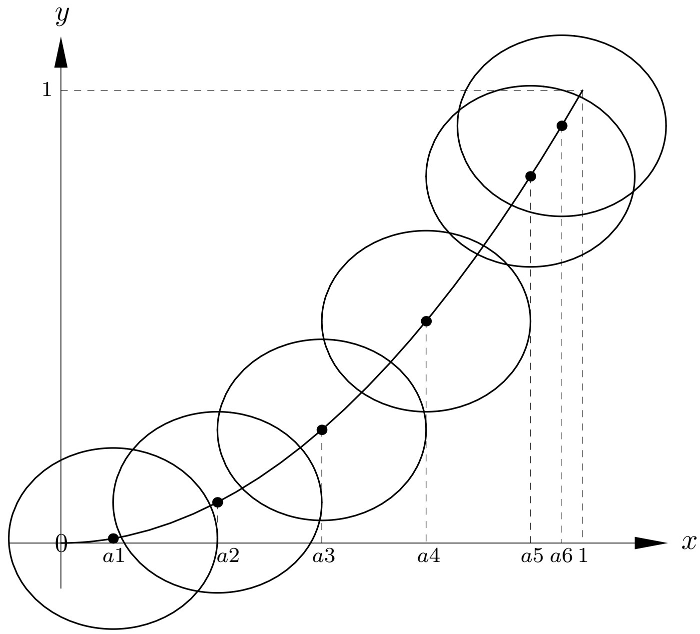
Wir betrachten jetzt a_5 und wählen t aus dem Intervall $\left[\frac{8}{10}, \frac{93}{100}\right]$. Dann gilt

$$(\star) \leq \frac{1}{10} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{80 + 93}{100}\right)^2} < \frac{1}{10} \cdot 2 = \frac{1}{5}.$$

Für a_6 bleibt noch das Intervall $\left[\frac{93}{100}, 1\right]$ für t zu berücksichtigen.
Dafür ist $|a_6 - t| \leq \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ und somit

$$(\star) \leq \frac{1}{25} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{96}{100} + 1\right)^2} \leq \frac{1}{25} \cdot \sqrt{5} < \frac{1}{5}.$$

Damit ist $\mathfrak{k}$ durch $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ vollständig überdeckt.



Es gibt natürlich noch viele andere Beispiele; dieses hier ist aber rechnerisch relativ einfach zu bewältigen.

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.1 (a) Zeigen Sie, daß für eine in a differenzierbare Funktion f im Allgemeinen nicht gilt: $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{|x-a|}$. **12/7/1/1**

(b) Man gebe ein Beispiel dafür an, daß die obige Gleichung erfüllt ist!

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.1 (a) $f(x) = x$ und $a = 0$ liefert ein Gegenbeispiel. **12/7/1/2**

(b) Für $f(x) = x^2$ und $a = 0$ gilt die Formel.

Lösung zu Aufgabe 7.1 **12/7/1/3**

(a) Als Gegenbeispiel betrachten wir $f(x) = x$ an der Stelle $a = 0$.
Offenbar ist f in $a = 0$ differenzierbar und $f'(0) = 1$.
Weiterhin gilt für $x \neq 0$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{|x-a|} = \frac{x}{|x|} \quad \text{und somit}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(a)}{|x-a|} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(a)}{|x-a|} = -1.$$

Folglich existiert der Limes von $\dfrac{f(x)-f(a)}{|x-a|}$ an der Stelle $a = 0$ nicht.

(b) Es sei $f(x) = x^2$ und $a = 0$. Dann gilt:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{x-0} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{|x-0|} = 0.$$

Folglich ist in diesem Fall $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(a)}{|x-a|}$.

7.2 Es sei $f(x) = x^2$. Wie groß kann eine ε-Umgebung U von 3 höchstens gewählt werden, so daß bei Ersetzung von f durch die Tangentenfunktion der Fehler in U stets kleiner als $\frac{1}{100}$ ist? **12/7/2/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.2 $\varepsilon = \frac{1}{10}$ leistet das Verlangte. **12/7/2/2**

Lösung zu Aufgabe 7.2 Die Tangente von $f(x) = x^2$ an der Stelle 3 ist durch $t(x) = f'(3)(x-3) + f(3) = 6x - 9$ gegeben. Wir betrachten zunächst alle $x \in \mathbb{R}$, so daß die Ungleichung **12/7/2/3**

$$(\star) \quad |f(x) - t(x)| = |x^2 - 6x + 9| < \frac{1}{100}$$

erfüllt ist und bestimmen daraus ein entsprechendes $\varepsilon > 0$, so daß die Ungleichung $(\star)$ für alle $x \in U_\varepsilon(3)$ gilt.

Wegen $x^2 - 6x + 9 = 0 \iff x = 3$ ist $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Folglich ist $|x^2 - 6x + 9| = x^2 - 6x + 9$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten jetzt x in einer Umgebung von 3 und setzen dazu $x := 3 + u$.
Dann ist

$$(\star) \iff (3+u)^2 - 6(3+u) + 9 < \frac{1}{100} \iff u^2 < \frac{1}{100} \iff |u| < \frac{1}{10}.$$

$\varepsilon = \frac{1}{10}$ leistet das Verlangte.

7.3 Man begründe die folgenden Näherungsformeln: **12/7/3/1**

(a) $\sin x \approx x$ falls $|x|$ „hinreichend klein“ ist,

(b) $\cos x \approx \frac{\pi}{2} - x$ falls $|\frac{\pi}{2} - x|$ „hinreichend klein“ ist,

(c) $\ln x \approx x - 1$ falls $|x - 1|$ „hinreichend klein“ ist,

(d) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$ falls $|x|$ „hinreichend klein“ ist.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.3 Sei f in a differenzierbar. Ist durch $t(x)$ die Tangente von f an der Stelle a gegeben, so gilt für (a) - (d): **12/7/3/2**

$\lim\limits_{x\to a}(f(x) - t(x)) = 0$, also $f(x) \approx t(x)$ für kleine $|x - a|$.

Lösung zu Aufgabe 7.3 Ist f eine Funktion, die an der Stelle $x = a$ differenzierbar ist, dann ist die Tangente von f an dieser Stelle durch $t(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ gegeben. Da differenzierbare Funktionen stetig sind, ist $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. **12/7/3/3**

Wegen $\lim\limits_{x\to a} t(x) = \lim\limits_{x\to a} \Big(f'(a)(x-a) + f(a)\Big) = f(a)$ gilt:

$$\lim_{x\to a} \Big(f(x) - t(x)\Big) = 0 \text{ und somit } f(x) \approx t(x) \text{ für „kleine“ } |x - a|.$$

(a) sin ist an der Stelle $x = 0$ differenzierbar und $t(x) = \sin' 0 \cdot (x - 0) + \sin 0 = x$.
Wegen $0 = \lim\limits_{x\to 0}\Big(f(x) - t(x)\Big) = \lim\limits_{x\to 0}(\sin x - x)$ ist $\sin x \approx x$ für „kleine“ $|x|$.

(b) $\cos$ ist an der Stelle $x=\frac{\pi}{2}$ differenzierbar und $t(x)=\cos'(\frac{\pi}{2})\cdot(x-\frac{\pi}{2})+\cos(\frac{\pi}{2})=-x+\frac{\pi}{2}$.
Wegen $0=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\Big(f(x)-t(x)\Big)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\Big(\cos x-(\frac{\pi}{2}-x)\Big)$ ist $\cos x\approx\frac{\pi}{2}-x$ für „kleine" $|\frac{\pi}{2}-x|$.

(c) $\ln$ ist an der Stelle $x=1$ differenzierbar und $t(x)=\ln' 1\cdot(x-1)+\ln 1=x-1$. Analog wie unter (b) ist $\ln x\approx x-1$ für „kleine" $|x-1|$.

(d) $\sqrt[3]{1+x}$ ist an der Stelle $x=0$ differenzierbar und $t(x)=\frac{1}{3}(x-0)+1=\frac{x}{3}+1$. Analog wie unter (b) ist dann $\sqrt[3]{1+x}\approx\frac{x}{3}+1$ für „kleine" $|x|$.

7.4 Zeigen Sie, daß die Ableitung einer differenzierbaren geraden Funktion ungerade und die Ableitung einer differenzierbaren ungeraden Funktion gerade ist! **12/7/4/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.4 Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Eigenschaften gerader und ungerader Funktionen. **12/7/4/2**

Lösung zu Aufgabe 7.4 Für differenzierbare Funktionen f gilt nach Definition: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$. **12/7/4/3**

Sei f gerade, also $f(-x)=f(x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}f'(-a)&=\lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}=\lim_{x\to -a}\frac{f(-x)-f(a)}{-(-x-a)}\\&=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{-(z-a)}\qquad (\text{für } z:=-x;\quad x\to -a \iff z\to a)\\&=-\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=-f'(a).\end{aligned}$$

Folglich ist f' ungerade.

Sei f ungerade, also $f(-x)=-f(x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}f'(-a)&=\lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}=\lim_{x\to -a}\frac{-(f(-x)-f(a))}{-(-x-a)}\\&=\lim_{z\to a}\frac{-(f(z)-f(a))}{-(z-a)}\qquad (\text{für } z:=-x;\quad x\to -a \iff z\to a)\\&=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=f'(a).\end{aligned}$$

Folglich ist f' gerade.

7.5 Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$, an der Stelle $a=0$ nicht (rechtsseitig) differenzierbar ist. **12/7/5/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.5 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{\sqrt{x}}\xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{}\infty$. **12/7/5/2**

Lösung zu Aufgabe 7.5 f ist an der Stelle a (rechtsseitig) differenzierbar $\Longleftrightarrow$ es existiert $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>0}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. **12/7/5/3**

Sei $f(x) := \sqrt{x}$ und $a = 0$. Dann gilt:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} \infty.$$

Folglich existiert der rechtsseitige Limes des Differenzenquotienten nicht.

7.6 Bilden Sie die Ableitung folgender Funktionen: **12/7/6/1**

(a) $f(x) = \left(2x + x\cdot\sqrt[4]{x^3}\right)^2$,

(b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}$,

(c) $f(x) = \sqrt{a\cdot\sin^2(xb)\cdot\cos^2 x}$,

(d) $f(x) = x^3\cdot e^{3x}\cdot\ln(x^2)$,

(e) $f(x) = x^x$,

(f) $f(x) = x^{\sin x}$,

(g) $f(x) = (\sin x)^x$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.6 (a) $f'(x) = 2\left(2x + x\cdot\sqrt[4]{x^3}\right)\cdot\left(2x + \frac{7}{4}\cdot\sqrt[4]{x^3}\right)$. **12/7/6/2**

(b) $f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{x} - 4x + 1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{(x-\sqrt{x}\,)^3}}$.

(c) $f'(x) = \dfrac{a\cdot\sin(xb)\cdot\cos x\cdot\left(b\cdot\cos(xb)\cos x - \sin(xb)\cdot\sin x\right)}{\sqrt{a\cdot\sin^2(xb)\cdot\cos^2 x}}$.

(d) $f'(x) = \mathrm{e}^{3x}\left(3x^3\ln(x^2) + 3x^2\cdot\ln(x^2) + 2x^2\right)$.

(e) $f'(x) = x^x\cdot\left(\ln x + 1\right)$.

(f) $f'(x) = x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x + \sin x\cdot\frac{1}{x}\right)$.

(g) $f'(x) = (\sin x)^x\cdot\left(\ln(\sin x) + x\cdot\cot x\right)$.

Lösung zu Aufgabe 7.6 **12/7/6/3**

(a)
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\left(2x + x\cdot\sqrt[4]{x^3}\right)\cdot\left(2x + x\cdot\sqrt[4]{x^3}\right)' \\ &= 2\left(2x + x\cdot\sqrt[4]{x^3}\right)\cdot\left(2 + \tfrac{7}{4}\cdot\sqrt[4]{x^3}\right). \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}} - x\cdot\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x-\sqrt{x}\right)'}{x-\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x - 2\sqrt{x} - x + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x-\sqrt{x}}\cdot\left(x-\sqrt{x}\right)} = \frac{2x\sqrt{x} - 4x + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{(x-\sqrt{x}\,)^3}}. \end{aligned}$$

(c) $f'(x) = \frac{1}{2}\Big(a\cdot\sin^2(xb)\cdot\cos^2 x\Big)^{-\frac{1}{2}} \cdot \Big(a\cdot\sin^2(xb)\cdot\cos^2 x\Big)'$

$$= \frac{a\cdot\Big(2\sin(xb)\cdot\cos(xb)\cdot b\cdot\cos^2 x + \sin^2(xb)\cdot 2\cos x(-\sin x)\Big)}{2\sqrt{a\cdot\sin^2(xb)\cdot\cos^2 x}}$$

$$= \frac{a\cdot\sin(xb)\cdot\cos x\cdot\Big(b\cdot\cos(xb)\cos x - \sin(xb)\cdot\sin x\Big)}{\sqrt{a\cdot\sin^2(xb)\cdot\cos^2 x}}.$$

(d) $f'(x) = 3x^2\cdot\Big(\mathrm{e}^{3x}\cdot\ln(x^2)\Big) + x^3\cdot\Big(3\mathrm{e}^{3x}\cdot\ln(x^2) + \mathrm{e}^{3x}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x\Big)$

$$= \mathrm{e}^{3x}\Big(3x^3\ln(x^2) + 3x^2\cdot\ln(x^2) + 2x^2\Big).$$

(e) Es ist $f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$. Folglich ist
$f'(x) = \mathrm{e}^{x\ln x}\Big(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\Big) = x^x\cdot\Big(\ln x + 1\Big)$.

(f) Es ist $f(x) = x^{\sin x} = \mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln x}$, also
$f'(x) = \mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln x}\Big(\cos x\cdot\ln x + \sin x\cdot\frac{1}{x}\Big)$

$$= x^{\sin x}\Big(\cos x\cdot\ln x + \sin x\cdot\frac{1}{x}\Big).$$

(g) Es ist $f(x) = (\sin x)^x = \mathrm{e}^{x\cdot\ln(\sin x)}$, also
$f'(x) = \mathrm{e}^{x\cdot\ln(\sin x)}\cdot\Big(\ln(\sin x) + x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\Big)$

$$= (\sin x)^x\cdot\Big(\ln(\sin x) + x\cdot\cot x\Big).$$

7.7 Zeigen Sie: Sind f und g in a n-mal differenzierbar, dann ist $f\cdot g$ in a n-mal differenzierbar und es ist $\quad (f\cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} f^{(i)}(a)\cdot g^{(n-i)}(a)$. **12/7/7/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.7 Der Beweis erfolgt induktiv über n. **12/7/7/2**

Lösung zu Aufgabe 7.7 Der Beweis erfolgt induktiv über n. **12/7/7/3**

Für $n = 1$ ist $(f\cdot g)' = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a) = \sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i} f^{(i)}(a)\cdot g^{(1-i)}(a)$.
Für k (mit $k < n$) gelte die Behauptung bereits; wir beweisen sie für $k+1$.
Der Einfachheit wegen schreiben wir für $f^{(i)}(a)$ bzw. $g^{(i)}(a)$ kurz $f^{(i)}$ bzw. $g^{(i)}$.
Nach Voraussetzung ist

$$(\star) := (f\cdot g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} f^{(i)}\cdot g^{(k-i)}.$$

Da Summen und Produkte von differenzierbaren Funktionen differenzierbar sind, ist $(f\cdot g)^{(k)}$ an der Stelle a (wenigstens) einmal differenzierbar und es gilt:

$$\left[(f\cdot g)^{(k)}\right]' = \sum_{i=0}^{k}\left(\binom{k}{i} f^{(i+1)}\cdot g^{(k-i)} + \binom{k}{i} f^{(i)}\cdot g^{(k+1-i)}\right)$$

$$= \binom{k}{0}\cdot f^{(0)}\cdot g^{(k+1)} + \sum_{i=0}^{k}\left[\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1}\right]\cdot f^{(i+1)}\cdot g^{(k-i)} + \binom{k}{k} f^{(k+1)}\cdot g^{(0)}$$

$$= \binom{k+1}{0}\cdot f^{(0)}\cdot g^{(k+1)} + \sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i+1}\cdot f^{(i+1)}\cdot g^{(k-i)} + \binom{k+1}{k+1} f^{(k+1)}\cdot g^{(0)}$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}\cdot f^{(i)}\cdot g^{(k+1-i)}.$$

Folglich gilt die Behauptung.

7.8 Folgende Funktionen sind auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit zu untersuchen: **12/7/8/1**

(a) $f(x) = |x-2|, \quad x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{für } x \le -2, \\ 0, & \text{für } x > -2. \end{cases}$

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.8 (a) Die Stetigkeit ist trivial. **12/7/8/2**

Für $a > 2$ ist f in a differenzierbar und $f'(a) = 1$.
Für $a < 2$ ist f in a differenzierbar und $f'(a) = -1$.
f ist in $a = 2$ nicht differenzierbar.

(b) f ist in $\mathbb{R}$ stetig und in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ differenzierbar; f ist an der Stelle -2 nicht differenzierbar.

Lösung zu Aufgabe 7.8 **12/7/8/3**

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

Wir zeigen zunächst, daß f an der Stelle a stetig ist.
Dazu sei (a_n) ein Folge mit $a_n \to a$. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} |a_n - 2| = |\lim_{n\to\infty} a_n - 2| = |a-2| = f(a).$$

Folglich ist f an einer beliebigen Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig.

Es sei jetzt $a \neq 2$.

Wir zeigen, daß f an der Stelle a differenzierbar ist.
1. Fall: $a > 2$; dann ist $|a-2| = a-2$ und für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung $U(a)$ gilt ebenfalls $|x-2| = x-2$. Folglich ist

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x-2-(a-2)}{x-a} = 1, \text{ also } \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = 1.$$

2. Fall: $a < 2$: dann ist $|a-2| = -(a-2)$ und für $x \in U(a)$ ist $|x-2| = -(x-2)$. Folglich ist

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{-(x-2)+(a-2)}{x-a} = -1, \text{ also } \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = -1.$$

Es sei jetzt $a = 2$.

Für $x > 2$ ist $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{x-2}{x-2} = 1$ und
für $x < 2$ ist $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{-(x-2)}{x-2} = -1$.
Links- und rechtsseitiger Limes von $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ an der Stelle 2 stimmen nicht überein; damit existiert der Limes dort nicht. Folglich ist f an der Stelle a nicht differenzierbar.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig.
Wir zeigen zunächst, daß f in a stetig ist.
Da konstante Funktionen und die Identitätsfunktion stetig sind und Summen und Produkte von stetigen Funktionen ebenfalls stetig sind, ist f an allen Stellen $a \neq -2$ stetig.
Es sei nun $a = -2$. Dann ist

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} (x^2+2x) = 0 = f(a) \quad \text{und}$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} 0 = 0.$$

Also $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Folglich ist f auch in $a = -2$ stetig.
Es sei jetzt $a \neq -2$.
Wir zeigen, daß f in a differenzierbar ist.
Da konstante Funktionen und die Identitätsfunktion differenzierbar sind und Summen und Produkte von differenzierbaren Funktionen ebenfalls differenzierbar sind, ist f an allen Stellen $a \neq -2$ differenzierbar.
Es sei nun $a = -2$. Dann gilt für $x < -2$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^2+2x-a^2-2a}{x-a} = \frac{x^2+2x}{x+2} = x \xrightarrow[x\to -2]{} -2.$$

Für $x > -2$ erhält man:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{0-a^2-2a}{x-a} = \frac{0}{x-a} = 0.$$

Links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten stimmen nicht überein. Folglich ist f an der Stelle $a = -2$ nicht differenzierbar.

7.9 Bilden Sie die Ableitung folgender Funktionen: **12/7/9/1**

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \le 0, \\ x^4+1, & \text{für } x > 0. \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{für } x < 0, \\ \mathrm{e}^x, & \text{für } x \ge 0. \end{cases}$

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.9 (a) $f'(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x \ge 0. \end{cases}$ **12/7/9/2**

(b) $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \le 0, \\ \mathrm{e}^x & \text{für } x > 0. \end{cases}$

Lösung zu Aufgabe 7.9 **12/7/9/3**

(a) Für $x < 0$ ist $f'(x) = 0$; für $x > 0$ ist $f'(x) = 4x^3$.
Es sei nun $a = 0$. Wir bilden $f'(a)$.
Für $x < 0$ ist $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1 - 1}{x} = 0$ und
für $x > 0$ ist $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^4 + 1 - 1}{x} = x^3 \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 0$.
Links- und rechtsseitiger Limes des Differenzenquotienten stimmen an der Stelle 0 überein und sind 0. Folglich ist $f'(0) = 0$.

(b) Für $x < 0$ ist $f'(x) = 1$; für $x > 0$ ist $f'(x) = \mathrm{e}^x$.
Es sei nun $a = 0$. Wir bilden $f'(a)$.
Für $x < 0$ ist $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x + 1 - \mathrm{e}^0}{x} = 1$.
Für $x > 0$ ist $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x} \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 1$.
(Hierbei wird ausgenutzt, daß $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, insbesondere an der Stelle 0.)
Folglich ist $f'(0) = 1$.

7.10 (a) An die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ werde im Punkt (a, b) die Tangente gelegt. Die Tangente schneide die x-Achse an der Stelle c. **12/7/10/1**
Zeigen Sie, daß der Abstand zwischen a und c stets 1 beträgt.
(b) Die an die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, im Punkt (a, b) gelegte Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.
Man zeige, daß der Flächeninhalt des Dreiecks unabhängig von der Wahl des Punktes (a, b) ist.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.10 (a) Elementare Rechnungen führen zum Ergebnis. **12/7/10/2**

(b) Der Flächeninhalt des Dreiecks ist stets 2.

Lösung zu Aufgabe 7.10 **12/7/10/3**

(a) Nach Voraussetzung ist $b = \mathrm{e}^a$. Die Tangente ist gegeben durch
$$t(x) = \mathrm{e}^a(x - a) + \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a(x - a + 1).$$
Aus $t(x) = 0$ berechnet man c. Es ist
$$t(x) = 0 \iff x - a + 1 = 0 \iff x = a - 1 = c.$$
Folglich ist $a - c = a - (a - 1) = 1$.

(b) Nach Voraussetzung ist $b = \frac{1}{a}$, $a \neq 0$. Die Tangente ist gegeben durch
$$t(x) = f'(a)(x - a) + f(a) = -\tfrac{1}{a^2}(x - a) + \tfrac{1}{a} = -\tfrac{x}{a^2} + \tfrac{2}{a}.$$
$t(x) = 0 \iff x = 2a$. $2a$ ist die Länge der Grundlinie des rechtwinkligen Dreiecks und $t(0) = \frac{2}{a}$ ist die Länge der Höhe. Folglich ist der Flächeninhalt des Dreiecks:
$F = \frac{1}{2}(2a \cdot \frac{2}{a}) = 2$.

7.11 (a) Für welchen Wert von a schneidet die Kurve $y = f(x) = \frac{ax - x^3}{4}$ die x-Achse unter einem Winkel von $45°$? **12/7/11/1**

(b) Man bestimme die zu der Geraden $y = x$ parallele Tangente an der Parabel $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{3}$.

(c) Man gebe die Gleichung der zur x-Achse parallel verlaufenden Tangente an der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ an.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.11 (a) $f'''(x) = 60x^2 \ln x + 47x^2$. **12/7/11/2**

(b) $f^{(50)}(x) = 2^{51}\mathrm{e}^{2x}\Big(x^2 + 50x + \frac{49\cdot 25}{4}\Big)$.

(c) $f^{(4n)}(x) = a^{4n}\cdot\sin ax$, $\quad f^{(4n+1)}(x) = a^{4n+1}\cdot\cos ax$,

$f^{(4n+2)}(x) = -a^{4n+2}\cdot\sin ax$, $\quad f^{(4n+3)}(x) = -a^{4n+3}\cdot\cos ax$.

Lösung zu Aufgabe 7.11 **12/7/11/3**

(a) Wir berechnen zunächst die Schnittpunkte von f mit der x-Achse.
Dazu setzen wir $f(x) = \frac{1}{4}x(a - x^2) = 0$.
Folglich ist $x = 0$ eine Lösung, und für $a > 0$ sind $x = \pm\sqrt{a}$ weitere Lösungen.
Der Anstieg von f an einer Stelle c ist gegeben durch $f'(c) = \frac{1}{4}(a - 3c^2)$.
Jetzt wird überprüft, ob es ein a gibt, so daß $f'(c) = 1$ an den Stellen $c = 0$ (für beliebiges a) und $c = \pm\sqrt{a}$ (für $a > 0$).
Für $c = 0$ ist $f'(c) = \frac{1}{4}a = 1 \iff a = 4$.
Für $c = \pm\sqrt{a}$ und $a > 0$ ist $f'(x) = \frac{1}{4}(a - 3a) = -\frac{1}{2}a = 1 \iff a = -2$.
Dies widerspricht der Bedingung $a > 0$.
Für $a = 4$ schneidet die Funktion f die x-Achse an der Stelle 0 im Winkel von $45°$.

(b) Wir suchen eine Stelle c, an der der Anstieg der Parabel $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 3)$ den Wert 1 annimmt.

$$f'(c) = \frac{1}{3}(2c - 3) = 1 \iff c = 3.$$

Folglich ist die Tangente gegeben durch

$$t(x) = f'(3)(x - 3) + f(3) = x - 2.$$

(c) Wir suchen eine Stelle c, an der der Anstieg von $f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ den Wert 0 annimmt.

$$f'(c) = \mathrm{e}^c - \mathrm{e}^{-c} = 0 \iff 2c = \ln 1 = 0 = \iff c = 0.$$

Die Tangente ist somit gegeben durch

$$t(x) = f'(0)(x - 0) + f(0) = 2.$$

7.12 Berechnen Sie: **12/7/12/1**

(a) $f^{(3)}$ von $f(x) = x^5 \ln x$,
(b) $f^{(50)}$ von $f(x) = x^2 e^{2x}$,
(c) $f^{(n)}$ von $f(x) = \sin(ax)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.12 (a) $f'''(x) = 60x^2 \ln x + 47x^2$. **12/7/12/2**

(b) $f^{(50)}(x) = 2^{51}\mathrm{e}^{2x}\Big(x^2 + 50x + \frac{49\cdot 25}{4}\Big)$.

(c) $f^{(4n)}(x) = a^{4n}\cdot\sin ax$, $\quad f^{(4n+1)}(x) = a^{4n+1}\cdot\cos ax$,
$f^{(4n+2)}(x) = -a^{4n+2}\cdot\sin ax$, $\quad f^{(4n+3)}(x) = -a^{4n+3}\cdot\cos ax$.

Lösung zu Aufgabe 7.12 **12/7/12/3**

(a) $f'(x) = 5x^4 \ln x + x^4$
$f''(x) = 20x^3 \ln x + 9x^3$
$f'''(x) = 60x^2 \ln x + 47x^2$

(b) Durch Probieren stellt man folgende Behauptung auf:

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{2x}\Big(2^n x^2 + n2^n x + \Big(\sum_{i=1}^{n-1} i\Big)\cdot 2^{n-1}\Big) \qquad \Big(\text{wobei } \sum_{i=1}^{0} i := 0\Big).$$

Dann gilt:

$$f'(x) = (\mathrm{e}^{2x}\cdot x^2)' = 2\mathrm{e}^{2x}x^2 + \mathrm{e}^{2x}2x = \mathrm{e}^{2x}(2^1x^2 + 2^1x).$$

Folglich ist die Behauptung für $n = 1$ richtig.
Die Behauptung gelte bereits für n; wir beweisen sie für $n+1$.

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}]'(x) \\ &= 2\mathrm{e}^{2x}\Big(2^n x^2 + n2^n x + \Big(\sum_{i=1}^{n-1} i\Big)2^{n-1}\Big) + \mathrm{e}^{2x}(2^{n+1}x + n2^n) \\ &= 2\mathrm{e}^{2x}\Big(2^{n+1}x^2 + (n+1)2^{n+1}x + \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)2^n\Big). \end{aligned}$$

Wegen $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$ ist $f^{(n)}(x) = 2\mathrm{e}^{2x}(2^n x^2 + n2^n x + \frac{(n-1)n}{2}\cdot 2^n)$ und somit

$$f^{(50)}(x) = 2\mathrm{e}^{2x}\Big(2^{50}\cdot x^2 + 50\cdot 2^{50}x + 49\cdot 25\cdot 2^{49} = 2^{51}\mathrm{e}^{2x}\Big(x^2 + 50x + \frac{49\cdot 25}{4}\Big).$$

(c) Induktiv über n zeigt man leicht:

$$\begin{aligned} f^{(4n)}(x) &= a^{4n}\cdot\sin ax, \\ f^{(4n+1)}(x) &= a^{4n+1}\cdot\cos ax, \\ f^{(4n+2)}(x) &= -a^{4n+2}\cdot\sin ax, \\ f^{(4n+3)}(x) &= -a^{4n+3}\cdot\cos ax. \end{aligned}$$

7.13 Es sei $f(x)$ n-mal differenzierbar und $g(x) = x \cdot f(x)$. **12/7/13/1**
Zeigen Sie, daß $g^{(n)}(x) = n\cdot f^{(n-1)}(x) + x\cdot f^{(n)}(x)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.13 Den Beweis führt man leicht induktiv über n. 12/7/13/2

Lösung zu Aufgabe 7.13 Den Beweis führt man sehr leicht induktiv über n. 12/7/13/3
Sei $n = 1$; dann ist $g'(x) = f(x) + xf'(x)$.
Für n gelte die Behauptung bereits. Dann ist:

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= [g^{(n)}]'(x) = n\cdot[f^{(n-1)}]'(x) + f^{(n)}(x) + x\cdot[f^{(n)}]'(x) \\ &= (n+1)\cdot f^{(n)}(x) + x\cdot f^{(n+1)}(x). \end{aligned}$$

7.14 Es sei 12/7/14/1

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x \le 0, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d, & \text{für } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{für } x > 1, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x \le 0, \\ Ax^2 + Bx + C, & \text{für } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie reelle Zahlen a, b, c, d, so daß f in $\mathbb{R}$ (stetig und) differenzierbar ist.

(b) Läßt sich die für f formulierte Aufgabe auch für g lösen?

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.14 (a) $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$, $d = 0$ leistet das Verlangte. 12/7/14/2

(b) Das Problem ist für g nicht lösbar.

Lösung zu Aufgabe 7.14 Wir benutzen den folgenden Satz: 12/7/14/3

Sei die Funktion f in einer Umgebung des Punktes a definiert.

f besitzt an der Stelle a einen Grenzwert (bzw. den Grenzwert c) $\iff$ f besitzt an der Stelle a einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert und beide sind gleich (bzw. den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert c).

(a) Wir untersuchen zunächst die Stetigkeit von f an der Stelle 0.
Offenbar gilt:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = d.$$

Hieraus folgt: $d = 0$.

Jetzt wird f an der Stelle 1 betrachtet.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = a + b + c + d = a + b + c \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 0.$$

Damit erhält man eine Bedingung für die restlichen unbekannten Koeffizienten:

$$a + b + c = 0.$$

Wir untersuchen jetzt die Differenzierbarkeit von f an den Stellen 0 und 1.
Da die Ableitungen von ganz-rationalen Funktionen stetig sind, gilt:

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f'(x) = 1 \quad\text{und}\quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(3ax^2+2bx+c) = c.$$

Folglich ist $c=1$. Weiterhin ist

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}}(3ax^2+2bx+c) = 3a+2b+c \quad\text{und}\quad \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f'(x) = 0.$$

Folglich ist $3a+2b+c=0$. Damit haben wir folgende Informationen erhalten:

$$d=0,\ c=1,\ a+b+c=0 \quad\text{und}\quad 3a+2b+c=0.$$

Zur Bestimmung der restlichen Koeffizienten bleibt nur noch das System der letzten beiden Gleichungen auszuwerten. Hieraus erhält man: $a=1,\ b=-2$.

Eine Überprüfung zeigt, daß die gefundenen Werte das Problem tatsächlich lösen.

(b) Analog wie unter (a) ist

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} g(x) = 0 \quad\text{und}\quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = C;$$

also $C=0$. Weiterhin ist

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} g(x) = A+B+C = A+B \quad\text{und}\quad \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} g(x) = 0;$$

somit gilt: $A+B=0$, also $A=-B$.

Die geforderte Differenzierbarkeit von g liefert:

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} g'(x) = 1 \quad\text{und}\quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} g'(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(2Ax+B) = B.$$

Damit ist $B=1$ und $A=-1$. Schließlich ist

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} g'(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}}(2Ax+B) = 2A+B \quad\text{und}\quad \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} g'(x) = 0;$$

somit ist $2A+B=0$. Dies widerspricht der Bedingung $A=-1, B=1$.

Das Problem ist für g nicht lösbar.

7.15 Es sei **12/7/15/1**

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x}, & \text{für } x\neq 0,\\ 0, & \text{für } x=0; \end{cases} \qquad n=0,1,2.$$

Zeigen Sie:

(a) f_0 ist in $x=0$ unstetig,

(b) f_1 ist in $x=0$ stetig, aber nicht differenzierbar,

(c) f_2 ist in $x=0$ differenzierbar.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.15 (a) ist trivial. **12/7/15/2**

(b) $|x\cdot\sin\frac{1}{x}| \le |x| \xrightarrow[x\to0]{} 0$; hieraus folgt die Stetigkeit an der Stelle $x=0$.

$\dfrac{x\cdot\sin\frac{1}{x}}{x} = \sin\frac{1}{x}$ besitzt an der Stelle 0 keinen Grenzwert.

Folglich ist f_1 in 0 nicht differenzierbar.

(c) $\dfrac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x} = x\cdot\sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 0$, folglich ist f_2 in 0 differenzierbar.

Lösung zu Aufgabe 7.15 **12/7/15/3**

(a) Es ist $f_0(0) = 0$. Wir betrachten die Nullfolge (a_n) mit $a_n := \dfrac{1}{(2n+\frac{1}{2})\cdot\pi}$.

Dann gilt offenbar:

$$f_0(a_n) = \sin(2n+\tfrac{1}{2})\cdot\pi = 1 \text{ für alle } n, \text{ also } \lim_{n\to\infty} f_0(a_n) = 1 \neq 0 = f_0(0).$$

Folglich ist f_0 in 0 nicht stetig.

(b) $|f_1(x) - f_1(0)| = |x\cdot\sin\frac{1}{x} - 0| = |x|\cdot|\sin\frac{1}{x}| \leq |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$

Folglich ist $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = f_1(0)$ und somit f_1 in 0 stetig.

Weiterhin gilt für $x \neq 0$:

$$\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = \frac{x\cdot\sin\frac{1}{x}}{x} = \sin\tfrac{1}{x}.$$

Der Limes des Differenzenquotienten von f_1 an der Stelle 0 existiert nicht, somit ist f_1 in 0 nicht differenzierbar.

(c) Wir bilden den Differenzenquotienten von f_2 an der Stelle 0:

$$\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x} = x\cdot\sin\tfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Der Limes des Differenzenquotienten existiert; folglich ist f_2 in 0 differenzierbar.

7.16 Es sei $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^3\sin(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$ **12/7/16/1**

Zeigen Sie:

(a) f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(0) > 0$,

(b) f' ist in $\mathbb{R}$ stetig,

(c) f ist in einer Umgebung von 0 monoton.

Geben Sie eine Beziehung zwischen dem Monotonieverhalten von f und dem Vorzeichen von f' an.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.16 (a) $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 3x^2\cdot\sin\frac{1}{x} - x\cdot\cos\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0. \end{cases}$ **12/7/16/2**

(b) Die „rationale Zusammensetzung“ stetiger Funktionen ist wieder stetig.

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = \frac{1}{2}$. Folglich ist f in $\mathbb{R}$ stetig.

(c) Da f' stetig und $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$ ist, ist f in einer Umgebung von 0 streng monoton wachsend.

Lösung zu Aufgabe 7.16 **12/7/16/3**

(a) Da rationale Funktionen und die Sinusfunktion in ihren Definitionsbereichen differenzierbar sind, ist f für alle $x \neq 0$ differenzierbar und es gilt für $x \neq 0$:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2} + 3x^2\cdot\sin\tfrac{1}{x} - x\cdot\cos\tfrac{1}{x}.$$

Wir untersuchen jetzt den Differenzenquotienten von f an der Stelle 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{2}+x^3\cdot\sin\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2}+x^2\cdot\sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}.$$

Folglich ist f in 0 differenzierbar und

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{2}.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned} |f'(x)-f'(0)| &= |\tfrac{1}{2}+3x^2\cdot\sin\tfrac{1}{x} - x\cos\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2}| \\ &= |3x^2|\cdot|\sin\tfrac{1}{x}| + |x|\cdot|\cos\tfrac{1}{x}| \\ &\le 3|x^2|+|x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0);$$

somit ist f' in 0 stetig.

(c) Nach (a) und (b) ist f in $\mathbb{R}$ differenzierbar und f' dort stetig.
Wegen $f'(0)=\frac{1}{2}>0$ existiert eine Umgebung von $U(0)$, so daß f' in $U(0)$ positiv ist (vgl. 6/3/11). Folglich ist f in $U(0)$ streng monoton wachsend.
Denn ist f in einem Intevall (a,b) differenzierbar und $f'(x)>0$ für alle $x\in(a,b)$, so ist f in (a,b) streng monoton wachsend (vgl. 7/3/9).

7.17 Zeigen Sie mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes (der Differentialrechnung): **12/7/17/1**

(a) Für jedes $x,y\in\mathbb{R}$ gilt: $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$,

(b) Für jedes $x,y\in\mathbb{R}$ gilt: $|\arctan x-\arctan y|\le|x-y|$,

(c) Für $x>0$ gilt: $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.17 Im Folgenden sei z eine (entsprechend des 1. Mittelwertsatzes) gewählte Stelle zwischen x und y. **12/7/17/2**

(a) Aus $\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}=\cos z$ folgt die Behauptung.

(b) Aus $\dfrac{\arctan x-\arctan y}{x-y}=\dfrac{1}{1+z^2}$ folgt die Behauptung.

(c) Aus $\dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}=\dfrac{1}{1+z}$ folgt die Behauptung.

Lösung zu Aufgabe 7.17 **12/7/17/3**

(a) Für $x=y$ ist die Behauptung trivial. Es sei nun $x\ne y$. Nach dem Mittelwertsatz ist $\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}=\cos z$ für ein z zwischen x und y. Also

$$|\sin x-\sin y| = |x-y|\cdot|\cos z| \le |x-y|.$$

(b) Für $x = y$ gilt die Behauptung offenbar. Es sei $x \neq y$. Wegen $(\arctan z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$ gilt nach dem Mittelwertsatz: $\dfrac{\arctan x - \arctan y}{x-y} = \dfrac{1}{1+z^2}$ für ein z zwischen x und y. Also

$$|\arctan x - \arctan y| = |x-y| \cdot \frac{1}{1+z^2} \leq |x-y|.$$

(c) Sei $f(x) = \ln(1+x)$. Wir benutzen den Mittelwertsatz für $y = 0 < x$. Dann gilt:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} = f'(z) = \frac{1}{1+z}$$

für ein z mit $0 < z < x$. Folglich ist

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+z} = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+z} < 1, \quad \text{also} \quad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

7.18 Wenden Sie den Satz von Taylor auf die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ an der Stelle $a = 0$ an, und berechnen Sie damit $\sqrt[3]{2}$ auf 2 Dezimalstellen genau (geänderte Fassung). **12/7/18/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.18 Es ist $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-4)}{3^n} \cdot (1+x)^{-\frac{3n-1}{3}}$ **12/7/18/2**
und somit $f(1) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{f^{(i)}(0)}{i!} + R_n(1)$, wobei $|R_n(1)| \leq \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{3^{n+1} \cdot (n+1)!}$.

Lösung zu Aufgabe 7.18 Es ist $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$. Induktiv über n zeigt man leicht: **12/7/18/3**

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-4)}{3^n} \cdot (1+x)^{-\frac{3n-1}{3}}.$$

Damit erhält man

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-4)}{3^n}.$$

Aufgrund des Taylorschen Satzes für $a = 0$ (vgl. 7/2/9) ist

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i + R_n(x), \quad \text{wobei} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

für ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$. Folglich ist

$$f(1) = \sqrt[3]{2} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} + R_n(1) \quad \text{mit}$$

$$R_n(1) = (-1)^{n+2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{3^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot (1+\vartheta)^{-\frac{3n+2}{3}}.$$

Wegen $\vartheta > 0$ ist $1 + \vartheta > 1$. Folglich ist

$$|R_n(1)| \leq \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{3^{n+1} \cdot (n+1)!}.$$

Für $n = 11$ ist $|R_n(x)| < \frac{1}{100}$. Damit gilt $\sqrt[3]{2} \approx \sum\limits_{i=0}^{11} \dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$.

7.19 Berechnen Sie mit Hilfe des Taylorschen Satzes: **12/7/19/1**

(a) $\cos\frac{1}{10}$, so daß der Fehler $\leq 10^{-6}$ wird,

(b) $\ln 2$, so daß der Fehler $\leq 10^{-1}$ wird,

(c) $e^{\frac{1}{100}}$, so daß der Fehler $\leq 10^{-6}$ wird.

[Hinweis: Man betrachte bei Aufgabe (b) die Funktion $\ln(1+x)$.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.19 Es sei $R_n(x)$ das Restglied in der Taylorschen Formel. Dann gilt für die entsprechenden Funktionen in (a) - (c): **12/7/19/2**

(a) $|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!\cdot 10^{n+1}}$; somit leistet $n=4$ das Verlangte.

(b) $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$; $n=9$ leistet das Verlangte.

(c) $|R_n(\frac{1}{100})| \leq \frac{4}{(n+1)!\cdot 10^{2n+2}}$; $n=2$ leistet das Verlangte.

Lösung zu Aufgabe 7.19 Nach dem Taylorsche Satz (vgl. 7/2/9) gilt: **12/7/19/3**

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}\cdot (x-a)^i + R_n(x),$$

wobei $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta(x-a))}{(n+1)!}\cdot (x-a)^{n+1}$ und $0<\vartheta<1$.

(a) Für $f(x)=\cos x$ ist

$$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x,\ f^{(4)}(x) = \cos x \quad \text{und}$$
$$f^{(4n+i)}(x) = f^{(i)}(x).$$

Wir setzen $a=0$, dann ist

$$f(a)=1,\ f'(a)=0,\ f''(a)=-1,\ f'''(a)=0,\ f^{(4)}(a)=1,\ f^{(4n+i)}(a)=f^{(i)}(a).$$

Offenbar ist stets $|f^{(n)}(x)|\leq 1$; somit gilt für $x=\frac{1}{10}$

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(a+\vartheta(x-a))|}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!\cdot 10^{n+1}}.$$

Schließlich gilt für $n=4$

$$|R_n(\tfrac{1}{10})| \leq \frac{1}{5!\cdot 10^5} < 10^{-6}. \text{ Also}$$

$$\cos\tfrac{1}{10} \approx \sum_{i=0}^{4}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}\cdot 1^i = 1 - \frac{1}{2!\cdot 10^2} + \frac{1}{4!\cdot 10^4}.$$

(b) Sei $f(x)=\ln(1+x)$. Induktiv über $n\geq 1$ zeigt man leicht:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Für $a=0$ und $x=1$ ist

$$|R_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!}\cdot|(-1)^n|\cdot\frac{n!}{(1+\vartheta)^{n+1}}\cdot 1^{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot(1+\vartheta)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Wählt man $n=9$, so ist $|R_n(1)|\leq\frac{1}{10}$. Folglich ist

$$\ln 2 \approx \sum_{i=0}^{9} \frac{f^{(i)}}{i!} = \sum_{i=1}^{9} \frac{(-1)^{i-1}}{i}.$$

(c) Sei $f(x) = \mathrm{e}^x$. Dann ist $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$. Für $a = 0$ und $x = \frac{1}{100}$ gilt:

$$|R_n(\tfrac{1}{100})| = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\vartheta}{100}}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{n+1} \leq \frac{4}{(n+1)! \cdot 10^{2n+2}}.$$

Wählt man $n = 2$, so ist $|R_n(\frac{1}{100})| < 10^{-6}$. Also

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{100}} \approx \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^i = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{2 \cdot 100^2}.$$

7.20 Man gebe die Taylorentwicklung für folgende Funktionen an der Stelle 0 an: **12/7/20/1**

(a) $f(x) = a^x$, $a > 0$,

(b) $f(x) = \sqrt{1+x}$ (auf die Abschätzung des Restgliedes wird verzichtet),

(c) $f(x) = \ln(2+x)$, für $|x| \leq 1$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.20 (a) $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^i}{i!} \cdot x^i$. **12/7/20/2**

(b) $f(x) = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i-3)}{2^i} \cdot x^i$.

(c) $f(x) = \ln 2 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{(i-1)!}{2^i} \cdot x^i$.

Lösung zu Aufgabe 7.20 Nach der Taylorschen Formel (vgl. 7/2/9 und 7/2/12) ist **12/7/20/3**

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(c)}{i!} \cdot (x-c)^i + R_n(x),$$

wobei $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c + \vartheta(x-c))}{(n+1)!} \cdot (x-c)^{n+1}$ und $0 < \vartheta < 1$.

(a) Für $f(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}$ ist $f^{(n)}(x) = (\ln a)^n \cdot a^x$. Folglich ist

$$|R_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \cdot |(\ln a)^{n+1} \cdot a^{\vartheta x}| \cdot |x|^{n+1} \leq \frac{|a^{\vartheta x}| \cdot |x \cdot \ln a|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

für jedes fixierte x. Somit ist

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^i}{i!} \cdot x^i.$$

(b) Sei $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ und

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-3)}{2^n} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$

für $n \geq 2$ und somit

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n}.$$

Folglich ist

$$f(x) = 1 + \tfrac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1{\cdot}3{\cdot}5 \cdots (2i-3)}{2^i} \cdot x^i.$$

(c) Sei $f(x) = \ln(2+x)$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{2+x}$, und für $n \geq 2$ erhält man

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(2+x)^n}.$$

Somit ist

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{2^n}.$$

Weiterhin gilt:

$$R_n(x) = (-1)^{n+2} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(2+\vartheta x)^{n+1}} \cdot x^{n+1}, \text{ also}$$

$$|R_n(x)| = |(-1)^{n+2}| \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{|2+\vartheta x|^{n+1}} \cdot |x|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (\text{für } |x| \leq 1).$$

Folglich ist

$$f(x) = \ln 2 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{(i-1)!}{2^i} \cdot x^i.$$

7.20 a Es sei $f(x) = x^2$. Wie groß kann eine ε-Umgebung U von 3 höchstens gewählt werden, so daß bei Ersetzung von f durch die Tangentenfunktion der Fehler in U stets kleiner als $\frac{1}{100}$ ist. **12/7/21/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.20a $U_{\frac{1}{10}}(3)$ leistet das Verlangte. **12/7/21/2**

Lösung zu Aufgabe 7.20a Wir benutzen die Taylorsche Formel (vgl. 7/2/9) für $n = 1$. **12/7/21/3**
Es ist $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 2$. Weiterhin ist $f(3) = 9$ und $f'(3) = 6$.
Für $t(x) = f(3) + f'(3)(x-3)$ gilt nach der Taylorschen Formel für $a = 0$:

$$f(x) = t(x) + R_1(x) = t(x) + \tfrac{2}{2!} \cdot (x-3)^2.$$

Folglich ist

$$|f(x) - t(x)| = |x-3|^2 < \tfrac{1}{100} \iff |x-3| < \tfrac{1}{10} \iff 3 - \tfrac{1}{10} < x < 3 + \tfrac{1}{10}.$$

$U_{\frac{1}{10}}(3)$ leistet das Verlangte.

7.21 Berechnen Sie: **12/7/22/1**

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\tan 3x}$, (c) $\lim x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right)$, $x \to 0$ $(x > 0)$ bzw. $x \to \infty$,

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(\sin 4x)}{\ln(\sin 3x)}$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.21 (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\tan 3x} = \frac{5}{3}$. **12/7/22/2**

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(\sin 4x)}{\ln(\sin 3x)} = 1$.

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)=0;\qquad \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)=\frac{1}{2}.$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$

Lösung zu Aufgabe 7.21 Wir benutzen die Regeln von de l'Hospital. **12/7/22/3**

(a) Es ist $\frac{\sin 5x}{\tan 3x}=\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\cdot\cos 3x$ und $\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x=1$.
Folglich genügt es, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$ zu bestimmen. Wegen

$$\frac{(\sin 5x)'}{(\sin 3x)'}=\frac{5\cdot\cos 5x}{3\cdot\cos 3x}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{5}{3}$$

gilt nach den Regeln von de l'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 3x}=\frac{5}{3}$.

(b) Es ist $\frac{[\ln(\sin 4x)]'}{[\ln(\sin 3x)]'}=\frac{4\cdot\cos 4x}{3\cdot\cos 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$.
Analog wie bei Aufgabe (a) ist $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\frac{3}{4}$. Also

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(\sin 4x)}{\ln(\sin 3x)}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}=1.$$

(c) Es gelte zunächst $x\to 0$ (und $x>0$, da sonst $\ln(1+\frac{1}{2x})$ nicht definiert ist).
Für $x>0$ und $x\to 0$ gilt: $1+\frac{1}{2x}\longrightarrow\infty$. Es liegt also der Fall „$0\cdot\infty$" vor.
Wegen

$$x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)=\frac{\ln(1+\frac{1}{2x})}{\frac{1}{x}}$$

gilt nach den de l'Hospitalschen Regeln:

$$\frac{[\ln(1+\frac{1}{2x})]'}{(\frac{1}{x})'}=\frac{x^2}{(1+\frac{1}{2x})\cdot 2x^2}=\frac{x}{2x+1}\xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{}0$$

und

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)=0.$$

Für $x\to\infty$ gilt: $1+\frac{1}{2x}\longrightarrow 1$ und $\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\longrightarrow 0$.
Damit erhält man den Fall „$\infty\cdot 0$". Analog wie oben gilt:

$$\frac{[\ln(1+\frac{1}{2x})]'}{(\frac{1}{x})'}=\frac{1}{2(1+\frac{1}{2x})}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{1}{2}.$$

Also

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)=\frac{1}{2}.$$

(d) Es ist $\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$. Folglich ist $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

7.22 Geben Sie ein Polynom an, das die Funktion $\ln(1+x)$ im Intervall $[0,\frac{1}{2}]$ bis auf zwei Stellen hinter dem Komma genau annähert. **12/7/23/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.22 Mit Hilfe der Taylorschen Formel erhält man das Polynom $p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$. **12/7/23/2**

Lösung zu Aufgabe 7.22 Wir benutzen die Taylorsche Formel für $a = 0$ (vgl. 7/2/9). **12/7/23/3**
Sei $f(x) = \ln(1 + x)$. Dann ist

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Weiterhin ist $f(0) = 0$ und $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \cdot (n+1)!$ und

$$R_n(x) = (-1)^{n+2} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}} \cdot x^{n+1}.$$

Somit erhält man

$$|R_n(x)| = |(-1)^{n+2}| \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{|1+\vartheta x|^{n+1}} \cdot |x|^{n+1}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^n} \qquad (\text{wegen } 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2} \text{ und } |1 + \vartheta x| \geq 1).$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} < \frac{1}{100} \iff 100 < (n+1) \cdot 2^n,$$

und diese Ungleichung ist für $n = 4$ erfüllt.

$$p(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{4} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

leistet das Verlangte.

7.23 Untersuchen Sie das Konvexitätsverhalten der folgenden Funktionen: **12/7/24/1**
(a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$,
(b) $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x - 4}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.23 Mit Hilfe des Satzes 7/3/16 erhält man: **12/7/24/2**

(a) f ist in $[\frac{2}{3}, \infty)$ und in $(-\infty, 0]$ streng konvex von unten und in $[0, \frac{2}{3}]$ streng konvex von oben.

(b) f ist in $(-\infty, 4]$ streng konvex von unten und in $[4, \infty)$ streng konvex von oben.

Lösung zu Aufgabe 7.23 Wir benutzen den folgenden Satz (vgl. 7/3/16): **12/7/24/3**
Ist f in (a, b) zweimal differenzierbar und $f''(x) > 0$ (bzw. < 0) für alle $x \in (a, b)$, dann ist f in (a, b) streng konvex von unten (bzw. von oben).

(a) Es ist $f''(x) = 12x(3x - 2)$. Wenn $x > \frac{2}{3}$ oder $x < 0$, so $f''(x) > 0$. Folglich ist f in $[\frac{2}{3}, \infty)$ und in $(-\infty, 0]$ streng konvex von unten.
Wenn $0 < x < \frac{2}{3}$, so $f''(x) < 0$; somit ist f in $[0, \frac{2}{3}]$ streng konvex von oben.

(b) Es ist $f''(x) = -\frac{2}{3^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x-4)^5}}$. Wenn $x < 4$, so $f''(x) > 0$. Folglich ist f in $(-\infty, 4]$ streng konvex von unten. Wenn $x > 4$, so $f''(x) < 0$; also f in $[4, \infty)$ streng konvex von oben.

7.24 Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \cos x - x + 1$ auf Nullstellen, lokale Extremwerte, Wendepunkte, Verhalten in $\pm\infty$. **12/7/25/1**
Skizzieren Sie die durch $f(x)$ definierte Kurve.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.24 f besitzt genau eine Nullstelle, und zwar in dem Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$. **12/7/25/2**

Die kritischen Stellen sind für $k \in \mathbb{Z}$ durch $x_k = (\frac{3}{2} + 2k)\pi$ gegeben.

f besitzt keine lokalen Extrema, aber an den Stellen x_k Wendepunkte mit
$f(x_k) = -x_k + 1$.

Es ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

Lösung zu Aufgabe 7.24 Wir untersuchen zunächst das Nullstellenverhalten der Funktion. **12/7/25/3**

Für $x < 0$ ist $-x + 1 > 1$ und daher $f(x) \neq 0$. Für $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ist $\cos x < 0$ und somit $\cos x - x < 1$, also $f(x) \neq 0$. Für $x > \frac{3\pi}{2}$ ist $f(x) < 0$. Es bleibt das Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ zu betrachten.

Wegen $f(0) = 2$ und $f(\frac{\pi}{2}) < 0$ besitzt f als stetige Funktion nach dem Zwischenwertsatz in $(0, \frac{\pi}{2})$ eine Nullstelle. Da $\sin x > 0$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ (vgl. 5/3/53) und $f'(x) = -\sin x - 1 < 0$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, ist f in $(0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton fallend.

Somit besitzt f in diesem Intervall genau eine Nullstelle (die bei Bedarf näherungsweise berechnet werden müßte).

Zur Bestimmung der Extrem- und Wendepunkte betrachten wir Ableitungen von f.

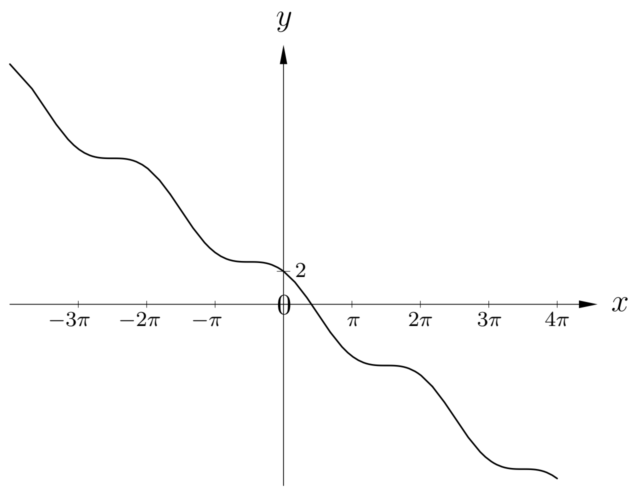
$$f'(x) = -\sin x - 1 = 0 \iff \sin x = -1 \iff x = (\tfrac{3}{2} + 2k)\pi \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

Die kritischen Stellen sind gegeben durch $x_k = (\frac{3}{2} + 2k)\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Weiterhin ist

$$f''(x_k) = -\cos x_k = 0 \text{ und } f'''(x_k) = \sin x_k = -1 \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Folglich besitzt f keine lokalen Extrema, aber Wendepunkte an den Stellen x_k für $k \in \mathbb{Z}$ mit $f(x_k) = -x_k + 1$.

Offenbar gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.



Die Funktion $f(x) = \cos x - x + 1$ ist streng monoton wachsend in $\mathbb{R}$; sie besitzt eine Nullstelle in dem Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$. f hat keine lokalen Extrema, jedoch für jedes $k \in \mathbb{Z}$ an der Stelle $x = (k + \frac{3}{2})\pi$ einen Wendepunkt.

7.25 Führen Sie für folgende Funktionen eine Kurvendiskussion durch: **12/7/26/1**

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$,

(b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.25 (a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $f(x) = 0 \iff x = 0$. **12/7/26/2**

f ist in $(-\infty, -1)$ und in $(-1, \infty)$ streng monoton wachsend.

f ist in $(-\infty, -1)$ streng konvex von unten und in $(-1, \infty)$ streng konvex von oben.

f besitzt kein lokales Extremum und keinen Wendepunkt.

f besitzt in $x = -1$ eine Unendlichkeitsstelle.

Es ist $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$.

Weiterhin ist $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.

(b) $D(f) = \mathbb{R}$ und $f(x) = 0 \iff x = 0$.

f ist in $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und in $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.

f ist in $(-\infty, -1]$ und in $[-1, \infty)$ streng konvex von oben und in $[-1, 1]$ streng konvex von unten.

$x = 0$ ist die einzige kritische Stelle; f besitzt dort ein lokales Minimum der Größe $f(0) = 0$.

f besitzt an den Stellen $x = \pm 1$ Wendepunkte mit den Koordinaten $(-1, \ln 2)$ bzw. $(1, \ln 2)$.

Es ist $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Lösung zu Aufgabe 7.25 **12/7/26/3**

(a) (i) Definitionsbereich, Nullstellen

Offenbar ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $f(x) = 0 \iff x = 0$.

(ii) Monotonie

Es ist $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x \in D(f)$ ist f in $(-\infty, -1)$ und in $(-1, \infty)$ streng monoton wachsend.

(iii) Konvexität

Es ist $f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$. Für $x < -1$ ist $f''(x) > 0$, und für $x > -1$ ist $f''(x) < 0$. Folglich ist f in $(-\infty, -1)$ streng konvex von unten und in $(-1, \infty)$ streng konvex von oben.

(iv) Lokale Extrema, Wendepunkte

Da f' und f'' keine Nullstellen haben, besitzt f kein lokales Extremum und keinen Wendepunkt.

(v) Unendlichkeitsstellen

f besitzt für $x = -1$ eine Unendlichkeitsstelle.
Es ist $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$.

(vi) Verhalten im Unendlichen

Offenbar ist $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.

(b) (i) Definitionsbereich, Nullstellen

Es ist $D(f) = \mathbb{R}$ und $f(x) = 0 \iff x = 0$.

(ii) Monotonie

Es ist $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Wegen $f'(x) < 0$ für $x < 0$ und $f'(x) > 0$ für $x > 0$ ist f in $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und in $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.

(iii) Konvexität

Es ist $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. Für $x < -1$ ist $f''(x) < 0$, für $-1 < x < 1$ ist $f''(x) > 0$ und für $x > -1$ ist $f''(x) < 0$. Folglich ist f in $(-\infty, -1]$ und in $[1, \infty)$ streng konvex von oben und in $[-1, 1]$ streng konvex von unten.

(iv) Lokale Extrema

$x = 0$ ist die einzige kritische Stelle. Wegen $f''(0) > 0$ besitzt f an dieser Stelle ein lokales Minimum der Größe $f(0) = 0$.

(v) Wendepunkte

Es ist $f'''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$.
Wegen $f''(x) = 0 \iff x = \pm 1$ und $f'''(\pm 1) \neq 0$ besitzt f an den Stellen $x = \pm 1$ Wendepunkte mit den Koordinaten $(-1, \ln 2)$ bzw. $(1, \ln 2)$.

(vi) Verhalten im Unendlichen

Es ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

7.26 Für die folgenden Funktionen führe man eine Kurvendiskussion durch: **12/7/27/1**

(a) $f(x) = x - \sin x$, (b) $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$,

(c) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$, mit Zeichnung!

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.26 (a) $D(f) = \mathbb{R}$; $x = 0$ ist die einzige Nullstelle. **12/7/27/2**

f ist in $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

Für $k \in \mathbb{Z}$ ist f in $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ streng konvex von unten und in $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ streng konvex von oben.

f besitzt keine lokalen Extrema.

Für $x_k = (k + \frac{1}{2})\pi$ besitzt f in x_k einen Wendepunkt mit den Koordinaten $(x_k, x_k - 1)$, falls k gerade und $(x_k, x_k + 1)$, falls k ungerade ist.

Es ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(b) $D(f) = \mathbb{R}$; es gibt genau 3 Nullstellen, in jedem der Intervalle $[-\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi]$ genau eine und $x = 0$.

Für $k \in \mathbb{Z}$ ist f in $[2k - \frac{1}{3}\pi, (2k + \frac{1}{3})\pi]$ streng monoton fallend und in $[(2k + \frac{1}{3})\pi, (2k + \frac{5}{3})\pi]$ streng monoton wachsend.

Die Konvexitätsbereiche stimmen mit denen von Aufgabe (a) überein.

f besitzt an der Stelle $x_k = (2k + \frac{1}{3})\pi$ ein lokales Minimum der Größe $\frac{x_k}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und an der Stelle $y_k = (2k - \frac{1}{3})\pi$ ein lokales Maximum der Größe $\frac{y_k}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

f besitzt an der Stelle $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, einen Wendepunkt mit den Koordinaten $(k\pi, \frac{k\pi}{2})$.

Es ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(c) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $x = -1$ ist die einzige Nullstelle.

f ist in $(-\infty, 0)$ und in $[\sqrt[3]{2}, \infty)$ streng monoton wachsend und in $(0, \sqrt[3]{2}]$ streng monoton fallend.

f ist in $(-\infty, 0)$ und in $(0, \infty)$ streng konvex von unten.

f besitzt an der Stelle $x_0 = \sqrt[3]{2}$ ein lokales Minimum mit $f(x_0) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

f besitzt keine Wendepunkte.

Es ist $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \infty = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ und

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Lösung zu Aufgabe 7.26 **12/7/27/3**

(a) (i) Definitionsbereich, Nullstellen

Es ist $D(f) = \mathbb{R}$ und $f(x) = 0 \iff \sin x = x$; also $x = 0$ ist die einzige Nullstelle.

(ii) Monotonie

Es ist $f'(x) = 1 - \cos x$ und somit $f'(x) \geq 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $f'(x) = 0 \iff x = (k + \frac{1}{2})\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.
Folglich ist f in $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

(iii) Konvexität

Es ist $f''(x) = \sin x$. Für $0 < x < \pi$ ist $f''(x) > 0$ und für $\pi < x < 2\pi$ ist $f''(x) < 0$. Wegen $\sin(x+2\pi) = \sin x$ ist f in $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ streng konvex von unten und in $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ streng konvex von oben $(k \in \mathbb{Z})$.

(iv) Lokale Extrema

Die kritischen Stellen sind $x_k = (k + \frac{1}{2})\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Offenbar ist $f''(x_k) = 0$. Wir betrachten weitere Ableitungen.

(v) Wendepunkte

Es ist $f'''(x) = \cos x$ und $f'''(x_k) \neq 0$. Folglich besitzt f keine lokalen Extrema, aber an den Stellen x_k Wendepunkte mit den Koordinaten $(x_k, x_k - 1)$, falls k gerade und $(x_k, x_k + 1)$, falls k ungerade ist.

(vi) Verhalten im Unendlichen

Es ist $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(b) (i) Definitionsbereich, Nullstellen

Es ist $D(f) = \mathbb{R}$ und $f(x) = 0 \iff \sin x = \frac{x}{2}$.
Eine Nullstelle ist sofort ersichtlich, nämlich $x = 0$. Falls es weitere Nullstellen gibt, müssen diese im Intervall $(-\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ liegen, da $\frac{|x|}{2} > 1$, falls $|x| > \frac{5}{6}\pi$.
Wir untersuchen jetzt f auf Nullstellen in $(-\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi)$. Dazu betrachten wir $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$.

Für $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$ ist $\cos x < \frac{1}{2}$ und somit $f'(x) > 0$. Folglich ist f in $[\frac{\pi}{3}, \frac{3}{5}\pi]$ streng monoton wachsend.
Weiterhin ist $f(\frac{\pi}{2}) < 0$ und $f(\frac{5}{6}\pi) > 0$. Wegen der Stetigkeit besitzt f nach dem Zwischenwertsatz in $(\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi)$ eine Nullstelle und aufgrund der strengen Monotonie genau eine Nullstelle. Da f eine ungerade Funktion ist, liegt auch in $(-\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{2})$ genau eine Nullstelle. Es bleiben noch die Intervalle $(0, \frac{\pi}{2})$, $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ zu betrachten. Wir zeigen, daß f dort keine Nullstelle besitzt.

Für $0 < |x| < \frac{\pi}{3}$ ist $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$ und somit f in $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ streng monoton fallend. Wegen $f(0) = 0$ besitzt f in $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ außer $x = 0$ keine weitere Nullstelle.
Für $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ ist $f'(x) > 0$ und daher ist f in $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend. Wegen $f(\frac{\pi}{2}) < 0$ kann f in $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ keine Nullstelle besitzen. Da f ungerade ist, kann f auch in $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ keine Nullstelle haben.

Es gibt also insgesamt 3 Nullstellen: in jedem der Intervalle $[-\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi]$ genau eine und $x = 0$. (Bei Bedarf müßten die Nullstellen näherungsweise berechnet werden.)

(ii) Monotonie
Für $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ ist $f'(x) < 0$, also f in $[\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi]$ streng monoton wachsend. Aufgrund der Periodizität von f' gilt dann: f ist in $[(2k - \frac{1}{3})\pi, (2k + \frac{1}{3})\pi]$ streng monoton fallend und in $[(2k+\frac{1}{3})\pi, (2k+\frac{5}{3})\pi]$ streng monoton wachsend $(k \in \mathbb{Z})$.

(iii) Konvexität
Es ist $f''(x) = \sin x$. Diese Ableitung stimmt mit der 2. Ableitung von f aus Aufgabe (a) überein. Folglich hat $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$ die dort ermittelten Konvexitätsbereiche.

(iv) Lokale Extrema
Es ist $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Sei $x_k = (2k + \frac{1}{3})\pi$ und $y_k = (2k - \frac{1}{3})\pi$.
Wegen $f''(x) = \sin x$ ist $f''(x_k) = \frac{1}{2}\sqrt{3} > 0$ und $f''(y_k) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} < 0$.
Folglich besitzt f an den Stellen x_k ein lokales Minimum der Größe $f(x_k) = \frac{x_k}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und an den Stellen y_k ein lokales Maximum der Größe $f(y_k) = \frac{y_k}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(v) Wendepunkte
Es ist $f''(x) = \sin x = 0 \iff x = k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
Weiterhin ist $f''(k\pi) = \cos(k\pi) \neq 0$. Somit besitzt f an den Stellen $x_k = k\pi$ Wendepunkte mit den Koordinaten $(k\pi, \frac{k\pi}{2})$.

(vi) Verhalten im Unendlichen
Es ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(c) (i) Definitionsbereich, Nullstellen
Es ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f(x) = 0 \iff x^3 = -1 \iff x = -1$.

(ii) Monotonie
Es ist $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$. Für $x > \sqrt[3]{2}$ ist $f'(x) > 0$; für $0 < x < \sqrt[3]{2}$ ist $f'(x) < 0$ und für $x < 0$ ist $x^3 < 0$ und somit $f'(x) > 0$. Folglich ist f

in $(-\infty, 0)$ und in $[\sqrt[3]{2}, \infty)$ streng monoton wachsend und in $(0, \sqrt[3]{2}]$ streng monoton fallend.

(iii) Konvexität

Es ist $f''(x) = \frac{6}{x^4}$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in D(f)$. Damit ist f in $(-\infty, 0)$ und in $(0, \infty)$ streng konvex von unten.

(iv) Lokale Extrema

Der einzige kritische Punkt ist durch $x = \sqrt[3]{2}$ gegeben. Wegen $f''(\sqrt[3]{2}) > 0$ besitzt f an der Stelle $x = \sqrt[3]{2}$ ein lokales Minimum der Größe $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

(v) Wendepunkte

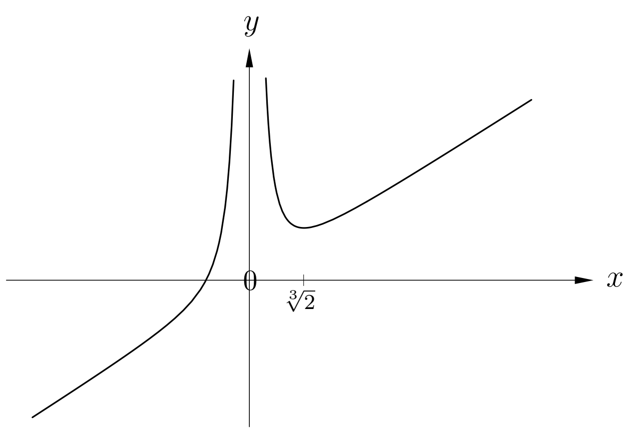
Da f'' keine Nullstellen hat, besitzt f auch keine Wendepunkte.

(vi) Unendlichkeitsstellen

Es ist $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \infty$.

(vii) Verhalten im Unendlichen

Es ist $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.



Die Funktion $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ besitzt für $x = -1$ eine Nullstelle. Sie ist in $(-\infty, 0)$ und in $[\sqrt[3]{2}, \infty)$ streng monoton wachsend und in $(0, \sqrt[3]{2}]$ streng monoton fallend. An der Stelle $x = \sqrt[3]{2}$ hat f ein lokales Minimum der Größe $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

7.27 Berechnen Sie die ersten drei Glieder der Taylorentwicklung von $p(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$ in $a = 2$. **12/7/28/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.27 Es ist $f(x) = -321 + 1087\cdot(x-2) + 1648\cdot(x-2)^2 + 1472\cdot(x-2)^3 +$ **12/7/28/2**

Lösung zu Aufgabe 7.27 Es gilt (vgl. 7/2/9): **12/7/28/3**

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}\cdot(x-a)^i + R_n(x)$$

mit $\quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1} \quad (0 < \vartheta < 1),$

$$f(2) = 2^8 - 2{\cdot}2^7 + 5{\cdot}2^6 - 2 + 3 = 321$$
$$f'(2) = 8{\cdot}2^7 - 14{\cdot}2^6 + 30{\cdot}2^5 - 1 = 1087$$
$$f''(2) = 56{\cdot}2^6 - 84{\cdot}2^5 + 150{\cdot}2^4 = 3296$$
$$f'''(2) = 336{\cdot}2^5 - 420{\cdot}2^4 + 600{\cdot}2^3 = 8832$$
$$f^{(4)}(x) = 1680{\cdot}x^4 - 1680{\cdot}x^3 + 1800{\cdot}x^2.$$

Also

$$f(x) = -321 + 1087{\cdot}(x-2) + 1648{\cdot}(x-2)^2 + 1472{\cdot}(x-2)^3 + R_3(x).$$

7.28 Bestimmen Sie so viele Glieder wie möglich in der Taylorentwicklung von $f(x) = 6\sin x + x^2$ in $a = 0$. **12/7/29/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.28 Es ist $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}{\cdot}x^i$ mit **12/7/29/2**

$f^{(4n)}(0) = 0$, $f^{(4n+1)}(0) = 6$, $f^{(4n+2)}(0) = 0$, $f^{(4n+3)}(0) = -6$ für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung zu Aufgabe 7.28 Es ist am einfachsten, die Taylorreihe (vgl. 7/2/9, 7/2/12 und 7/2/14) von f zu betrachten. Dazu bilden wir alle Ableitungen von f: **12/7/29/3**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6\cos x + 2x, & f'(0) &= 6 \\ f''(x) &= -6\sin x + 2, & f''(0) &= 2 \\ f'''(x) &= -6\cos x, & f'''(0) &= -6 \\ f^{(4)}(x) &= 6\sin x, & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Offenbar gilt dann auch für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} f^{(4n)}(x) &= 6\sin x, & f^{(4n)}(0) &= 0 \\ f^{(4n+1)}(x) &= 6\cos x, & f^{(4n+1)}(0) &= 6 \\ f^{(4n+2)}(x) &= -6\sin x, & f^{(4n+2)}(0) &= 0 \\ f^{(4n+3)}(x) &= -6\cos x, & f^{(4n+3)}(0) &= -6. \end{aligned}$$

Es ist

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}{\cdot}x^i + R_n(x) \quad \text{mit} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!}{\cdot}x^{n+1}.$$

Damit erhält man

$$|R_n(x)| =\leq \frac{6}{(n+1)!}{\cdot}|x|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

für jedes fixierte $x \in \mathbb{R}$ und schließlich

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i.$$

7.29 Ist der Fehler bei der Näherung $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ für $0 \le x \le \frac{1}{2}$ kleiner als $\frac{1}{100}$? Bestimmen Sie damit $\sqrt{\mathrm{e}}$ auf 3 Stellen genau. **12/7/30/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.29 Es ist $\sqrt{\mathrm{e}} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{6 \cdot 2^3} + \frac{1}{24 \cdot 2^4} \approx 1{,}6484.$ **12/7/30/2**

Lösung zu Aufgabe 7.29 Wir benutzen den Taylorschen Satz (vgl. 7/2/9). Es ist **12/7/30/3**

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i + R_n(x) \quad \text{mit} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

Für $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $a = 0$ erhält man $f^{(i)}(x) = \mathrm{e}^x$ und $f^{(i)}(0) = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und somit für $n = 3$:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{\mathrm{e}^{\vartheta x}}{4!} \cdot x^4.$$

Wegen $0 \le x \le \frac{1}{2}$ und $0 < \vartheta < 1$ ist $\mathrm{e}^{\vartheta x} \le \sqrt{\mathrm{e}} \le 2$ und $|x|^4 \le \frac{1}{2^4}$. Also

$$|R_n(x)| \le \frac{2}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} < \frac{1}{100}.$$

Es ist $\sqrt{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$. Folglich kann der obere Ansatz für den restlichen Teil der Aufgabe genutzt werden. Allerdings muß $|R_n(x)| < \frac{1}{10^3}$ sein für $x = \frac{1}{2}$. Hierzu wählen wir $n = 4$, denn

$$|R_n(x)| \le \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\vartheta}}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} < \frac{2}{5! 2^5} = \frac{1}{10^4} < \frac{1}{10^3}.$$

Damit erhält man

$$\sqrt{\mathrm{e}} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{6 \cdot 2^3} + \frac{1}{24 \cdot 2^4} \approx 1{,}6484.$$

7.30 Prüfen Sie, ob in den folgenden Fällen die Voraussetzungen der Regel von de l'Hospital erfüllt sind, und bestimmen Sie die betreffenden Grenzwerte: **12/7/31/1**

(a) $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\sin x}$ für $x \to 0$,

(b) $\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x \cdot \cos x}$ für $x \to 0$,

(c) $\dfrac{\ln x}{\ln(\sin x)}$ für $x \searrow 0$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.30 Die Voraussetzungen für die Regeln von de l'Hospital sind in jedem Fall erfüllt und es gilt: **12/7/31/2**

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\sin x} = 1.$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x \cdot \cos x} = 2.$

(c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\ln x}{\ln(\sin x)} = 1.$

Lösung zu Aufgabe 7.30 Offenbar sind alle in den Aufgaben (a) - (c) auftretenden Funktionen in ihren Definitionsbereichen differenzierbar. **12/7/31/3**

(a) Es gilt $e^x - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ und $\sin \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Damit sind die Voraussetzungen für die Anwendung der Regel von de l'Hospital erfüllt und es ist

$$\frac{(e^x-1)'}{(\sin x)'} = \frac{e^x}{\cos x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

Folglich erhält man

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x} = 1.$$

(b) Es gilt $e^x - e^{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} = 0$ und $\sin x \cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Die Voraussetzungen sind erfüllt und es gilt:

$$\frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x \cos x)'} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} \xrightarrow[x\to 0]{} = 2.$$

Also

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x} = 2.$$

(c) Es gilt $\ln x \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} -\infty$ und wegen $\sin x > 0$ für $0 < x < \pi$ ist $\ln(\sin x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} -\infty$. Damit sind auch hierfür die Voraussetzungen für die Anwendung der Regel von de l'Hospital erfüllt und man erhält

$$\frac{(\ln x)'}{(\ln(\sin x))'} = \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 1.$$

Also

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)} = 1.$$

7.31 Berechnen Sie mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital die folgenden Grenzwerte: **12/7/32/1**

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$,

(d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2^x - 1)^{\sin x}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.31 (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = 2.$ **12/7/32/2**

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2.$

(c) $\displaystyle\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x} = \frac{4}{9}.$

(d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2^x - 1)^{\sin x} = e^0 = 1.$

Lösung zu Aufgabe 7.31 **12/7/32/3**

(a) Es gilt $\tan x - x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $x - \sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ und somit

$$\frac{(\tan x - x)'}{(x-\sin x)'} = \frac{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{1-\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot (1-\cos x)} = \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

Folglich ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = 2.$$

(b) Es gilt $e^x - e^{-x} - 2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $x - \sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ und somit

$$\frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x-\sin x)'} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x}.$$

Wegen $e^x + e^{-x} - 2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ und $1-\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ kann die Regel noch einmal angewendet werden. Dadurch erhält man

$$\frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1-\cos x)'} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \quad \text{mit } e^x - e^{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \text{ und } \sin x \xrightarrow[x\to x]{} 0.$$

Erneute Anwendung der Regel liefert

$$\frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

Schließlich gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

(c) Es gilt $\sqrt[3]{1+2x} + 1 \xrightarrow[x\to -1]{} 0$, $\sqrt{2+x} + x \xrightarrow[x\to -1]{} 0$ und somit

$$\frac{(\sqrt[3]{1+2x}+1)'}{(\sqrt{2+x}+x)'} = \frac{\frac{1}{3}\cdot \frac{2}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+x}} + 1} \xrightarrow[x\to -1]{} \frac{4}{9}.$$

(d) Es gilt $2^x - 1 \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{}$ und $\sin x \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0$. Damit haben wir die Form „0^0“.

Für $x > 0$ ist

$$(2^x - 1)^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln(2^x - 1)}.$$

Wir berechnen zunächst den Grenzwert des Exponenten. Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhält man daraus den gewünschten Grenzwert.
Wegen $\sin x \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0$ und $\ln(2^x-1) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} -\infty$ bilden wir

$$\sin x \cdot \ln(2^x - 1) = \frac{\ln(2^x-1)}{\frac{1}{\sin x}}.$$

Somit entsteht die Form „$\frac{-\infty}{\infty}$“. Schließlich gilt:

$$(\star) := \frac{(\ln(2^x-1))'}{(\frac{1}{\sin x})'} = \frac{\frac{\ln 2 \cdot 2^x}{2^x - 1}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\frac{\ln 2\cdot 2^x}{\cos x}\cdot \frac{\sin^2 x}{2^x - 1}.$$

Offenbar ist $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(-\frac{\ln 2 \cdot 2^x}{\cos x}\right) = -\ln 2$, aber $\sin^2 x \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0$ und $2^x - 1 \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0$, folglich wenden wir für $\frac{\sin^2 x}{2^x - 1}$ noch einmal die Regel von de l'Hospital an:

$$\frac{(\sin^2 x)'}{(2^x-1)'} = \frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\ln 2\cdot 2^x} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0.$$

Damit erhält man $(\star) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} (-\ln 2)\cdot 0 = 0$ und schließlich

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2^x-1)^{\sin x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

7.32 Mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital bestimme man folgende Grenzwerte: **12/7/33/1**

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\sin x)^x$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-a^{-x}}{1-x-\log_a(a-x)}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$,

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\cdot\tan x$,

(e) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \dfrac{\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a}}}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0)$,

(f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.32 (a) $\lim\limits_{\substack{x\to x\\ x>0}} (\sin x)^x = \mathrm{e}^0 = 1.$ **12/7/33/2**

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-a^{-x}}{1-x-\log_a(a-x)} = \dfrac{2a\cdot(\ln a)^2}{1-a\cdot\ln a} \quad (\ln a \neq \frac{1}{a}).$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)} = \sqrt{a\cdot b}.$

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\cdot\tan x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sin x} = 0.$

(e) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \dfrac{\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a}}}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}.$

(f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = \mathrm{e}^0 = 1.$

Lösung zu Aufgabe 7.32 **12/7/33/3**

(a) Für $x>0$ ist $(\sin x)^x = \mathrm{e}^{x\cdot\ln(\sin x)}$. Wir berechnen zunächst den Grenzwert des Exponenten $x\cdot\ln(\sin x)$, der die Gestalt „$0\cdot\infty$" besitzt. Es ist

$$x\cdot\ln(\sin x) = \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} \quad \text{und somit}$$

$$\frac{(\ln(\sin x))'}{(\frac{1}{x})'} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\sin x} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0.$$

Folglich ist

$$\lim_{\substack{x\to x\\ x>0}} (\sin x)^x = \mathrm{e}^0 = 1.$$

(b) Es gilt $a^x - a^{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $1-x-\log_a(a-x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ und somit

$$\frac{(a^x-a^{-x})'}{(1-x-\log_a(a-x))'} = \frac{(\ln a)^2(a^x+a^{-x})(a-x)}{1-(a-x)\cdot\ln a} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2a\cdot(\ln a)^2}{1-a\cdot\ln a}$$

für $\ln a \neq \frac{1}{a}$ (anderenfalls läßt sich der Grenzwert so nicht untersuchen).
Folglich ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{-x}}{1 - x - \log_a(a-x)} = \frac{2a\cdot(\ln a)^2}{1 - a\cdot\ln a} \quad (\ln a \neq \tfrac{1}{a}).$$

(c) Es ist $\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln(\frac{a^x+b^x}{2})}$.
Wir berechnen zunächst den Grenzwert des Exponenten:

$$\frac{\left(\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)'}{(x)'} = \frac{a^x\cdot\ln a + b^x\cdot\ln b}{a^x+b^x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\ln a + \ln b}{2}.$$

Folglich gilt:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)} = \sqrt{a\cdot b}.$$

(d) Für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ gilt:

$$(1-\sin x)\cdot\tan x = \sin x\cdot\frac{1-\sin x}{\cos x}.$$

Wegen $\sin x \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 1$ wenden wir die Regel nur auf $\frac{1-\sin x}{\cos x}$ an. Es ist

$$\frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'} = \frac{\cos x}{\sin x} \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 0, \quad \text{also}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\cdot\tan x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x} = 0.$$

(e) Wegen $\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a}} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x<0}]{} 0$ und $\sqrt{a^2-x^2} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x<0}]{} 0$ kann die Regel angewendet werden, und es gilt:

$$\frac{\left(\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a}}\right)'}{(\sqrt{a^2-x^2})'} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2-x^2}{a}}}\cdot\frac{-2x}{2a\cdot\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a}}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{a-a^2+x^2}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a-a^2+x^2}} \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x<a}]{} \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Also

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a}}}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

(f) Für $0 < x < \pi$ und $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ist $(\sin x)^{\tan x} = \mathrm{e}^{\tan x\cdot\ln(\sin x)}$.
Wir berechnen den Grenzwert des Exponenten. Es ist

$$\tan x\cdot\ln(\sin x) = \sin x\cdot\frac{\ln(\sin x)}{\cos x} \quad \text{und} \quad \sin x \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 1.$$

Wegen $\ln(\sin x) \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 0$ und $\cos x \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 0$ ist die Regel auf $\frac{\ln(\sin x)}{\cos x}$ anwendbar:

$$\frac{(\ln(\sin x))'}{(\cos x)'} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 0.$$

Also

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

7.33 Eine in einer Umgebung U von a definierte Funktion f heißt an der Stelle a lokal monoton wachsend, wenn gilt: **12/7/34/1**

Für alle $x \in U$ mit $x < a$ ist $f(x) < f(a)$ und
für alle $x \in U$ mit $x > a$ ist $f(x) > f(a)$.

(a) Zeigen Sie: Ist f in a differenzierbar und $f'(a) > 0$, so ist f in a lokal monoton wachsend.

(b) Man zeige durch ein Beispiel, daß nicht gilt: Ist $f'(a) > 0$, so existiert eine Umgebung U von a, in welcher f monoton wächst.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.33 (a) Wegen $0 < f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ und der Definition des Limes existiert **12/7/34/2**

eine Umgebung $U(a)$, so daß $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ für alle $x \in U(a)$.
Hieraus folgt die Behauptung.

(b) Die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ leistet das Verlangte.

Lösung zu Aufgabe 7.33 **12/7/34/3**

(a) Nach Voraussetzung ist $0 < f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
Aufgrund der Definition des Limes existiert dann eine Umgebung $U(a)$, so daß $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ für alle $x \in U(a)$. Damit erhält man:

(i) Wenn $x < a$, so $f(x) - f(a) < 0$ und daher $f(x) < f(a)$ für $x \in U(a)$.

(ii) Wenn $x > a$, so $f(x) - f(a) > 0$ und daher $f(x) > f(a)$ für $x \in U(a)$.

Folglich ist f in $U(a)$ lokal monoton wachsend.

(b) Es sei $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

f ist an der Stelle $x = 0$ differenzierbar und es gilt:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{2} + x^2 \cdot \sin \frac{\pi}{x}}{x} = \frac{1}{2} + x \cdot \sin \frac{\pi}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}.$$

Folglich ist $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$.
Angenommen, es gibt eine Umgebung $U(0)$, so daß f in $U(0)$ monoton wächst.
Dann gilt für alle $x, y \in U(0)$: Wenn $x < y$, so $f(x) \leq f(y)$.
Sei $k \in \mathbb{N}$, so daß $x = \dfrac{1}{2k + \frac{1}{2}}$, $y = \dfrac{1}{2k - \frac{1}{2}}$ und $x, y \in U(0)$. Offenbar ist $x < y$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x) \leq f(y) &\iff \frac{1}{2(2k + \frac{1}{2})} + \frac{1}{(2k + \frac{1}{2})^2} \leq \frac{1}{2(2k - \frac{1}{2})} - \frac{1}{(2k - \frac{1}{2})^2} \\ &\iff \frac{2k + \frac{5}{2}}{2(2k + \frac{1}{2})^2} \leq \frac{2k - \frac{5}{2}}{2(2k - \frac{1}{2})^2} \\ &\iff (2k + \tfrac{5}{2})(2k - \tfrac{1}{2})^2 \leq (2k - \tfrac{5}{2})(2k + \tfrac{1}{2})^2 \\ &\iff 12k^2 + \tfrac{5}{4} < 0 \quad ↯! \end{aligned}$$

Folglich ist f in $U(0)$ nicht monoton wachsend.

7.34 Zeigen Sie, daß die Funktion f mit $f(x) = \begin{cases} x^2\Big(2 + \sin\frac{1}{x}\Big) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ **12/7/35/1**

an der Stelle 0 ein lokales Extremum hat, ohne links und rechts von 0 eindeutiges Monotonieverhalten zu zeigen, d.h., es existiert kein $\varepsilon > 0$, so daß f in $(-\varepsilon, 0)$ und in $(0, \varepsilon)$ monoton ist.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.34 Offenbar ist $f(x) > 0$ für alle $x \neq 0$. Folglich besitzt f in 0 ein lokales Minimum. **12/7/35/2**

Für $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ und $y_k = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ mit $k \in \mathbb{N}$ gilt: $f'(x_k) < 0$ und $f'(y_k) > 0$. Hieraus erhält man schließlich die Behauptung.

Lösung zu Aufgabe 7.34 Es ist $f(0) = 0$ und $|\sin\frac{1}{x}| \leq 1$. Folglich ist $f(x) = x^2(2 + \sin\frac{1}{x}) \geq x^2 > 0$ für alle $x \neq 0$. Daher besitzt f in 0 ein lokales Minimum. Für $x \neq 0$ ist **12/7/35/3**

$$f'(x) = 2x\cdot(2 + \sin\tfrac{1}{x}) - \cos\tfrac{1}{x}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir zeigen, daß f in $(0, \varepsilon)$ weder monoton wächst noch monoton fällt. Sei $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \frac{1}{2k\pi}$, $y_k = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ und k so groß, daß $0 < x_k < y_k < \varepsilon$.
Dann ist

$$\sin\frac{1}{x_k} = \sin\frac{1}{y_k} = 0 \quad \text{und} \quad \cos\frac{1}{x_k} = 1,\ \ \cos\frac{1}{y_k} = -1.$$

Daraus folgt

$$f'(x_k) = \frac{4}{2k\pi} - 1 < 0 \quad \text{und} \quad f'(y_k) = \frac{4}{(2k+1)\pi} + 1 > 0.$$

Aufgrund der Stetigkeit von f' in $(0, \varepsilon)$ gibt es eine Umgebung $U'(x_k) \subseteq (0, \varepsilon)$, so daß f' dort negativ und eine Umgebung $U''(y_k) \subseteq (0, \varepsilon)$, so daß f' dort positiv ist (vgl. 6/3/11), d.h., f ist in $(0, \varepsilon)$ weder monoton wachsend noch monoton fallend.
Analog behandelt man $(-\varepsilon, 0)$.

7.35 Beweisen Sie die folgende Aussage („Schrankensatz"): **12/7/36/1**

Es sei f in einem Intervall I differenzierbar; es sei m eine untere und M eine obere Schranke für den Anstieg einer beliebigen Tangente an f in I. Dann liegt auch der Anstieg einer beliebigen Sekante in I zwischen m und M.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.35 Den Beweis führt man leicht mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. **12/7/36/2**

Lösung zu Aufgabe 7.25 Nach Voraussetzung ist f in I differenzierbar und $m \leq f'(x) \leq M$ für alle $x \in I$. Seien $x, y \in I$ mit $x \neq y$. Der Anstieg der Sekante (bezüglich x, y) ist gegeben durch $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Aufgrund des 1. Mittelwertsatzes der Differentialrechnung gibt es ein z zwischen x und y, so daß $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(z)$. Folglich gilt auch **12/7/36/3**

$$m \le f'(z) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \le M \quad \text{für alle } x, y \in I,\ x \neq y.$$

7.36 Das Maximum einer in einem Intervall $I = [a, b]$ definierten Funktion f könnte man näherungsweise wie folgt bestimmen: **12/7/37/1**
Man unterteilt I in gleich lange Teilintervalle, berechnet die Funktionswerte an allen Teilungspunkten und sucht sich den größten Funktionswert heraus.

(a) Es sei nun f in I differenzierbar und $|f'(x)| < c$ für alle $x \in I$. Man schätze den Fehler ab, den man bei der oben beschriebenen Methode begeht.

(b) Wie fein müßte man bei der Berechnung des Maximums der Funktion f mit $f(x) = \sin(\ln x) + \cos 3x$ im Intervall $[\pi, 2\pi]$ die Unterteilung wählen, um sicher zu sein, daß das berechnete Maximum höchstens um 0,01 vom tatsächlichen abweicht?

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.36 (a) Der Fehler beträgt höchstens $c \cdot \frac{b-a}{n}$. **12/7/37/2**

(b) Wählt man $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ mit $a_{i+1} = \frac{b-a}{n} \cdot (i+1)$ und $0 \le i < n$, dann leistet $n = 1048$ das Verlangte.

Lösung zu Aufgabe 7.36 **12/7/37/3**

(a) Wir zerlegen das Intervall $I = [a, b]$ durch $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ in Teilintervalle $I_i = [a_i, a_{i+1}]$, $0 \le i < n$, so daß $a_{i+1} = a_0 + \frac{b-a}{n} \cdot (i+1)$. Die Länge jedes Teilintervalls beträgt dann $\frac{b-a}{n}$. Das (durch die oben beschriebene Methode) näherungsweise bestimmte Maximum M_n ist gegeben durch

$$M_n = \max\{f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_n)\}.$$

Sei nun $x \in I_i$, r einer der beiden Randpunkte von I_i mit $x \neq r$. Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt:

$$\frac{f(x) - f(r)}{x - r} = f'(z) \quad \text{für ein } z \text{ zwischen } x \text{ und } r, \text{ also}$$

$$|f(x) - f(r)| = |f'(z)| \cdot |x - r| \le c \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Der Fehler bei der obigen Methode beträgt also höchstens $c \cdot \frac{b-a}{n}$.

(b) Es ist $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos(\ln x) - 3 \cdot \sin 3x$ und somit

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\le |\tfrac{1}{x}| \cdot |\cos(\ln x)| + 3 \cdot |\sin 3x| \\ &\le \tfrac{1}{\pi} + 3 \le \tfrac{10}{3} \quad \text{für } x \in [\pi, 2\pi]. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe (a) ist der Fehler höchstens $\frac{10}{3} \cdot \frac{b-a}{n}$. Wir suchen jetzt ein n, so daß $\frac{10}{3} \cdot \frac{b-a}{n} < \frac{1}{100}$, d.h. $\frac{1000}{3} \cdot \pi < n$; $n = 1048$ leistet das Verlangte.

7.37 Die Zahl 8 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß die Summe der Kuben dieser Summanden am kleinsten ist. **12/7/38/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.37 $8 = x + y$ mit $x = 4$ und $y = 4$ leistet das Verlangte. **12/7/38/2**

Lösung zu Aufgabe 7.37 Nach Voraussetzung ist $x + y = 8$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und der Nebenbedingung, daß $x^3 + y^3$ minimal wird. Es ist $y = 8 - x$. Wir suchen ein globales Minimum von **12/7/38/3**

$$f(x) = x^3 + y^3 = x^3 + (8 - x)^3.$$

Dazu untersuchen wir f zunächst auf lokale Extrema. Es ist

$$f'(x) = -48(4 - x), \quad f''(x) = 48 \quad \text{und somit}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 4 \quad \text{und} \quad f''(4) > 0.$$

Folglich besitzt f an der Stelle $x = 4$ ein lokales Minimum. Läßt man als Definitionsbereich von f ganz $\mathbb{R}$ zu, so ist offenbar das lokale Minimum auch das globale. Schränkt man den Definitinosbereich auf $[0, 8]$ ein, dann muß $f(4) = 2{\cdot}4^3$ mit $f(0) = f(8) = 8^3$ verglichen werden. Dies zeigt, daß auch in diesem Fall f an der Stelle $x = 4$, $(y = 4)$ ein globales Minimum besitzt.

7.38 Welche positive Zahl ergibt bei Addition ihrer Reziproken die kleinste Summe? **12/7/39/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.38 $x = 1$ ist die gesuchte Zahl. **12/7/39/2**

Lösung zu Aufgabe 7.38 Sei $f(x) = x + \frac{1}{x}$ mit $x > 0$. Wir suchen ein globales Minimum von f in $(0, \infty)$. Dazu untersuchen wir f auf lokale Extrema und bilden die Ableitungen von f: **12/7/39/3**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Es ist

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1 \quad \text{und} \quad f''(1) = 2 > 0, \;\; f''(-1) = -2 < 0.$$

Folglich besitzt f an der Stelle $x = 1$ ein lokales Minimum, welches gleichzeitig globales Minimum von f ist (die Randpunkte von $D(f)$ gehören nicht zu $D(f)$).

7.39 Welche Länge muß die Grundseite eines regulären dreieckigen Prismas mit gegebenem Volumen haben, damit die Oberfläche minimal wird? **12/7/40/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.39 Ist V das Volumen des Prismas, so ist die Länge der Grundlinie des Prismas durch $\sqrt[3]{4V}$ gegeben. **12/7/40/2**

Lösung zu Aufgabe 7.39 Es sei x die Länge der Grundlinie und h die Höhe des Prismas. Das (gegebene) Volumen beträgt $V = \frac{x^2}{4} \cdot h \cdot \sqrt{3}$ (mit $x > 0$, da sonst $V = 0$ für $x = 0$) und die Oberfläche ist gegeben durch $O = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x^2 + 3xh$. Wegen $h = \frac{4V}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x^2}$ ist **12/7/40/3**

$$O(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x^2 + \frac{12V}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x}.$$

Wir suchen ein globales Minimum von O. Dazu untersuchen wir O zunächst auf lokale Extrema. Es ist

$$O'(x) = \sqrt{3} \cdot x - \frac{12V}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x^2} \quad \text{und} \quad O''(x) = \sqrt{3} + \frac{24V}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x^3}.$$

Weiterhin gilt:

$$O'(x) = 0 \iff x = \sqrt[3]{4V} \quad \text{und somit}$$

$$O''(\sqrt[3]{4V}) = \frac{9}{\sqrt{3}} > 0.$$

Folglich besitzt O an der Stelle $x = \sqrt[3]{4V}$ ein lokales Minimum, das gleichzeitig globales Minimum ist (da die Randpunkte von $D(O)$ nicht zu $D(O)$ gehören).

7.40 Ein oben offenes zylindrisches Gefäß mit kreisförmiger Grundfläche soll ein vorgeschriebenes Volumen V besitzen. Der Herstellungspreis für $1\,\mathrm{m}^2$ Mantelfläche betrage a, derjenige für $1\,\mathrm{m}^2$ Grundfläche betrage b, $(a, b > 0)$. **12/7/41/1**
Welche Abmessungen muß das Gefäß haben, damit die Herstellungskosten möglichst gering sind?

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.40 Die Abmessungen des Gefäßes betragen: $r = \sqrt[3]{\frac{aV}{b\pi}}$ **12/7/41/2**
und $h = \frac{V}{\pi \cdot \sqrt[3]{(\frac{aV}{b\pi})^2}}$, wobei r den Radius und h die Höhe bezeichnen.

Lösung zu Aufgabe 7.40 Es sei r der Radius und h die Höhe des Gefäßes. Dann **12/7/41/3**
ist $V = r^2\pi h$ das gegebene Volumen und $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Somit entstehen Materialkosten in Höhe von

$$K(r) = 2r\pi h a + r^2\pi b = \frac{2aV}{r} + b\pi r^2.$$

Es ist

$$K'(r) = -\frac{2aV}{r^2} + 2b\pi r, \quad K''(r) = \frac{4aV}{r^3} + 2b\pi, \quad \text{also}$$

$$K'(r) = 0 \iff r^3 = \frac{aV}{b\pi} \quad \text{und somit} \quad r = \sqrt[3]{\frac{aV}{b\pi}}.$$

Weiterhin gilt:

$$K''\left(\sqrt[3]{\frac{aV}{b\pi}}\right) = 6b\pi > 0.$$

Folglich besitzt K an der Stelle $r = \sqrt[3]{\frac{aV}{b\pi}}$ ein lokales Minimum. Wegen $D(K) = [0, \infty)$ und $K(0) = 0$ ist das lokale Minimum auch das globale. Die Abmessungen des Gefäßes sind gegeben durch

$$r = \sqrt[3]{\frac{aV}{b\pi}} \quad \text{und} \quad h = \frac{V}{\pi \cdot \sqrt[3]{(\frac{aV}{b\pi})^2}}.$$

7.41 Von allen Quadern mit quadratischer Grundfläche, für die das Verhältnis von Volumen zur Oberfläche einen gegebenen Wert besitzt, soll derjenige bestimmt werden, für den der Mantel möglichst klein wird. **12/7/42/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.41 Es seien V, O, M das Volumen, die Oberfläche bzw. der Mantel des jeweiligen Quaders. Weiterhin sei x die Länge einer Seite der Grundfläche und h die Höhe des Quaders. Dann ist $M = 4{\cdot}xh$. Damit leistet $x = 8{\cdot}\frac{V}{O}$ das Verlangte. **12/7/42/2**

Lösung zu Aufgabe 7.41 Sei x die Länge einer Seite der Grundfläche und h die Höhe des Quaders. Volumen, Oberfläche und Mantel des Quaders sind gegeben durch **12/7/42/3**

$$V = x^2{\cdot}h, \quad O = 2x^2 + 4xh, \quad M = 4xh.$$

Es sei $\frac{V}{O} = \frac{xh}{2x+4h} := c > 0$, dann ist $h = \frac{2cx}{x-4c}$ und somit

$$M(x) = \frac{8cx^2}{x-4c}, \quad x \neq 4c.$$

(Für $x = 4c$ erhält man aus $\frac{V}{O} = c = \frac{4ch}{8c+4h}$ leicht $2c^2 = 0$ ↯!)

Wir suchen ein globales Minimum von M. Dazu untersuchen wir M auf lokale Extrema. Es ist

$$M'(x) = \frac{8cx(x-8c)}{(x-4c)^2} \quad \text{und} \quad M''(x) = \frac{16^2c^3}{(x-4c)^3}.$$

Weiterhin gilt:

$$M'(x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 8c.$$

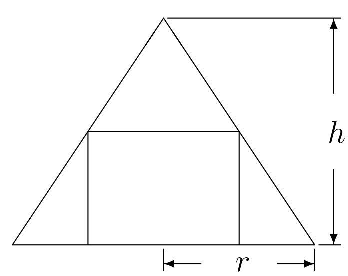
$x = 0$ scheidet als Lösung aus, es bleibt $x = 8c$ zu betrachten.

$$M''(8c) = \frac{16^2c^3}{(8c-4c)^3} = 4 > 0.$$

Folglich besitzt M an der Stelle $x = 8c$ ein lokales Minimum, das gleichzeitig globales Minimum ist.

7.42 Einem geraden Kreiskegel mit dem Radius r und der Höhe h soll ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben werden (vgl. Zeichnung). **12/7/43/1**

Welche Abmessungen muß der Kreiszylinder haben, damit sein Volumen möglichst groß wird.



Lösungshinweis zu Aufgabe 7.42 Der Radius des Kreiszylinders beträgt $\frac{2}{3}{\cdot}r$ und seine Höhe $\frac{1}{3}{\cdot}h$. **12/7/43/2**

Lösung zu Aufgabe 7.42 Es sei x der Radius und y die Höhe des einbeschriebenen **12/7/43/3**

Zylinders. Sein Volumen beträgt $V = x^2\pi y$. Der Punkt (x, y), der die obere rechte Ecke des Zylinders (in der Seitenansicht – vgl. Zeichnung) markiert, genügt der Gleichung $y = -\frac{h}{r} \cdot x + h$.
Folglich ist

$$V(x) = x^2\pi(-\tfrac{h}{r}\cdot x + h) = -\tfrac{h\pi}{r}\cdot x^3 + h\pi x^2.$$

Wir suchen ein globales Maximum von V. Dazu untersuchen wir V auf lokale Extrema. Es ist

$$V'(x) = h\pi x\cdot(2 - \tfrac{3}{r}\cdot x) \quad \text{und} \quad V''(x) = 2h\pi\cdot(1 - \tfrac{3}{r}\cdot x).$$

Weiterhin gilt:

$$V'(x) = 0 \iff x = 0 \;\text{ oder }\; x = \tfrac{2}{3}\cdot r \quad \text{und}$$

$$V''(0) = 2h\pi > 0, \quad V''(\tfrac{2}{3}\cdot r) = -2h\pi < 0.$$

Für $x = \frac{2}{3}\cdot r$ besitzt V ein lokales Maximum, das gleichzeitig globales Maximum von V ist, denn $V(0) = V(r) = 0$ und $V(\frac{2}{3}\cdot r) = \frac{4r^2\pi h}{27} > 0$.i Die Höhe des Zylinders beträgt $y = \frac{1}{3}h$.

7.43 n und k seien gegebene ganze Zahlen. Für welche Werte von n und k läßt sich n in eine Summe von zwei ganzen Zahlen x, y zerlegen, so daß bezüglich aller Zerlegungen $n = x + y$ der Ausdruck $x^k + y^k$ einen möglichst kleinen Wert besitzt? **12/7/44/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.43 Sei $n = x + y$, also $y = n - x$. **12/7/44/2**

1. Fall: $n = 0$. Für $k = 0$ realisiert jedes $x \neq 0$ das globale Minimum.
Sei jetzt $k \neq 0$. Für gerade k realisiert $x = y = 0$ und für ungerade k jede Zerlegung das globale Minimum.

2. Fall: $n \neq 0$. Für $k \in \{0, 1\}$ realisiert jede Zerlegung $n = x + y$ mit $x, y \neq 0$ das globale Minimum.
Für $k \notin \{0, 1\}$ und gerade n realisiert $x = y = \frac{n}{2}$ das globale Minimum.
Für ungerade n existiert keine Lösung.

Lösung zu Aufgabe 7.43 Wegen $n = x + y$ ist $y = n - x$. Wir suchen ein globales Minimum von **12/7/44/3**

$$f(x) = x^k + y^k = x^k + (n - x)^k.$$

Da „0^0“ nicht definiert ist, erscheint eine Fallunterscheidung hilfreich.

(i) Sei $n = 0$, also $y = -x$ und somit $f(x) = x^k + (-x)^k$.
Für $k = 0$ scheidet der Fall $x = 0$ (als zulässige Zerlegung) aus.
Für $x \neq 0$ ist $f(x) = 2$, d.h., jede Zerlegung $0 = x - x$ mit $x \neq 0$ realisiert das globale Minimum.

Sei jetzt $k \neq 0$. Ist k ungerade, so ist $f(x) = x^k - x^k = 0$. Damit realisiert jede Zerlegung das globale Minimum. Ist k gerade, so ist $f(x) = 2x^k$. Folglich realisiert $x = y = 0$ das globale Minimum.

(ii) Es sei jetzt $n \neq 0$.
Für $k = 0$ ist $f(x) = x^0 + (n-x)^0$. Damit scheiden die Zerlegungen $x = 0,\ y = n$ und $x = n,\ y = 0$ aus. Für $y = n - x$ und $x, y \neq 0$ ist f konstant. Folglich realisiert jede solche Zerlegung das globale Minimum.
Für $k = 1$ ist $f(x) = n$; somit realisiert jede Zerlegung das globale Minimum.
Es bleiben jetzt noch die Fälle $n \neq 0$ und $k \neq 0,\ k \neq 1$ zu betrachten. Hierzu untersuchen wir $f(x) = x^k + (n-x)^k$ auf lokale Extrema. Es ist

$$f'(x) = k\Big(x^{k-1} - (n-x)^{k-1}\Big) \quad \text{und} \quad f''(x) = k(k-1)\Big(x^{k-2} + (n-x)^{k-2}\Big).$$

Weiterhin ist

$$f'(x) = 0 \iff x^{k-1} = (n-x)^{k-1} \iff \begin{cases} 1 = \left(\frac{n}{x} - 1\right)^{k-1}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 = n^{k-1} \neq 0 \ \lightning! & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Also $1 = \frac{n}{x} - 1$ und somit $x = \frac{n}{2}$. Für gerades $k - 1$ entsteht noch die Lösung $1 = -(\frac{n}{x} - 1)$ und somit $n = 0$; dieser Fall ist aber ausgeschlossen. Als einzige Lösung bleibt $x = \frac{n}{2}$.

$$f''(\tfrac{n}{2}) = 2k(k-1)\left(\tfrac{n}{2}\right)^{k-2}.$$

Hieraus ergeben sich folgende Schlußfolgerungen:
Wegen $x \in \mathbb{Z}$ muß n gerade sein. Da $k \neq 0,\ k \neq 1$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist, gilt $k(k-1) > 0$. Folglich ist für $n > 0$ stets $f''(\frac{n}{2}) > 0$.
Für gerade $n > 0$ realisiert $x = \frac{n}{2}$ und $y = n - x = \frac{n}{2}$ das globale Minimum.
Sei jetzt $n < 0$ (n gerade). Dann ist $f''(\frac{n}{2}) > 0$ für gerade k und $f''(\frac{n}{2}) < 0$ für ungerade k. Folglich realisiert $x = \frac{n}{2},\ y = \frac{n}{2}$ das globale Minimum. Für ungerade n existiert keine Lösung.

7.44 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist eine Gerade durch den Punkt $(1, 2)$ **12/7/45/1**
so zu legen, daß sie mit den positiven Koordinatenachsen ein Dreieck mit möglichst kleinem Flächeninhalt einschließt.
Geben Sie die Gleichung der Geraden an.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.43 Sei $n = x + y$, also $y = n - x$. **12/7/45/2**

1. Fall: $n = 0$. Für $k = 0$ realisiert jedes $x \neq 0$ das globale Minimum.
Sei jetzt $k \neq 0$. Für gerade k realisiert $x = y = 0$ und für ungerade k jede Zerlegung das globale Minimum.

2. Fall: $n \neq 0$. Für $k \in \{0, 1\}$ realisiert jede Zerlegung $n = x + y$ mit $x, y \neq 0$ das globale Minimum.
Für $k \notin \{0, 1\}$ und gerade n realisiert $x = y = \frac{n}{2}$ das globale Minimum.
Für ungerade n existiert keine Lösung.

Lösung zu Aufgabe 7.43 Die durch $(1, 2)$ gehende Gerade schneide die x-Achse im Punkt $(a, 0)$ und die y-Achse im Punkt $(0, b)$. Die Gleichung der Geraden ist dann gegeben durch $y = -\frac{b}{a} \cdot x + b$ und der Flächeninhalt des entstehenden Dreiecks durch $F = \frac{ab}{2}$. Aus der Geradengleichung erhält man für $x = 1$ und $y = 2$: $b = \dfrac{2a}{a-1}$. Folglich ist **12/7/45/3**

$$F = F(a) = \frac{a^2}{a-1}.$$

Weiterhin ist

$$F'(a) = \frac{a(a-2)}{(a-1)^2} \quad \text{und} \quad F''(a) = \frac{2}{(a-1)^3}$$

und somit

$$f'(a) = 0 \iff a = 0 \text{ oder } a = 2.$$

$a = 0$ scheidet als Lösung offenbar aus. Es ist $f''(2) = 2 > 0$. Folglich besitzt F an der Stelle $a = 2$ ein lokales Minimum, das gleichzeitig globales Minimum ist.
Aus $b = \dfrac{2a}{a-1}$ folgt: $b = 4$.
Die Gleichung der Geraden ist gegeben durch $y = -2x + 4$.

7.45 In eine gegebene Halbkugel vom Radius R soll ein gerader Kegel einbeschrieben werden, dessen Spitze im Mittelpunkt der Grundfläche der Halbkugel liegt. **12/7/46/1**
Wie sind die Abmessungen des Kegels zu wählen, so daß sein Volumen möglichst groß wird?

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.45 Der Radius des Kegels sei r und seine Höhe h. Das Volumen des Kegels besitzt für $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ und $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$ ein globales Maximum. **12/7/46/2**

Lösung zu Aufgabe 7.45 Der Radius des Kegels sei r und seine Höhe h. Dann gilt offenbar $R^2 = r^2 + h^2$ und somit $r^2 = R^2 - h^2$. Das Volumen des Kegels beträgt $V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 h$ und somit **12/7/46/3**

$$V = V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot (R^2 h - h^3).$$

Wir suchen ein globales Maximum von V. Dazu untersuchen wir V zunächst auf lokale Extrema. Es ist

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot (R^2 - 3h^2) \quad \text{und} \quad V''(h) = -2\pi h.$$

Weiterhin gilt:

$$V'(h) = 0 \iff h = \pm \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Der negative Wert von h scheidet offenbar als Lösung aus. Es genügt also $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ zu betrachten. Es gilt:

$$V''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\pi R}{\sqrt{3}} < 0.$$

Folglich besitzt V an der Stelle $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ ein lokales Maximum. Wegen $D(V) = [0, h]$ müssen zur Untersuchung eines globalen Maximums noch die Werte $V(0) = 0 = V(h)$ berücksichtigt werden. Da

$$V\Big(\tfrac{R}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \Big(\frac{R^3}{\sqrt{3}} - \frac{R^3}{3\sqrt{3}}\Big) = \frac{2\pi R^3}{9 \cdot \sqrt{3}} > V(0) = V(h)$$

besitzt f an der Stelle $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ auch ein globales Maximum.

Die Abmessungen des Kegels sind gegeben durch

$$h = \frac{R}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \cdot R\,.$$

7.46 Beim Kugelstoßen ist die Wurfweite **12/7/47/1**

$$w(\alpha) = \frac{v^2}{g} \cdot \cos\alpha\Big(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \tfrac{2gh}{v^2}}\,\Big).$$

Dabei ist α der Abwurfwinkel, v die Abwurfgeschwindigkeit, h die Abwurfhöhe (sie beträgt etwa $\frac{6}{5}$ der Körperhöhe).

Für welchen Winkel α ist die Wurfweite am größten?

Zahlenbeispiel: $h = 2\,m,\ v = 11\,\frac{m}{s},\ g = 9,8\,\frac{m}{s^2}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.46 Es ist $w'(\alpha) = 0 \iff \alpha = \arcsin\Big(\pm\frac{1}{\sqrt{2+a}}\Big)$. **12/7/47/2**

Der negative Wert scheidet aus praktischen Gründen aus.

$$w''(\alpha) = b \cdot \Bigg[\underbrace{-2\sin\alpha\Big(\cos\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2 \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + a}}\Big)}_{:=S_1} +$$

$$\underbrace{\cos\alpha}_{:=r}\Bigg(\underbrace{-2\sin\alpha}_{:=S_2}\underbrace{-\sqrt{\sin^2\alpha + a} + \frac{\cos 2\alpha \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + a} - \frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + a}}}{\sin^2\alpha + a}}_{:=S_3}\Bigg)\Bigg].$$

Man zeigt: $w''(\alpha) < 0$; folglich besitzt f an der Stelle $\alpha \approx 0,6561$ oder $\alpha \approx 41°$ ein (globales) Maximum. (Die Lösung der Aufgabe ist technisch recht aufwendig.)

Lösung zu Aufgabe 7.46 Abkürzend setzen wir $a := \frac{2gh}{v^2}$ und $b := \frac{v^2}{g}$ (offenbar sind $a, b \neq 0$). Dann ist **12/7/47/3**

$$w(\alpha) = b\cos\alpha\Big(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + a}\Big).$$

Wir suchen ein globales Maximum von w. Dazu untersuchen wir w auf lokale Extrema in dem Bereich $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (die übrigen Werte von α scheiden aus praktischen Gründen als Lösung aus). Es ist

$$w'(\alpha) = b \cdot \Big[-\sin\alpha\Big(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + a}\Big) + \cos\alpha\Big(\cos\alpha + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + a}}\Big)\Big]$$

und

$$
\begin{aligned}
w'(\alpha) = 0 \iff & \sqrt{\sin^2\alpha + a}\cdot(1 - 2\sin^2\alpha) = \sin\alpha(2\sin^2\alpha + a - 1)\\
&\implies (2+a)\sin^2\alpha = 1 \implies \sin^2\alpha = \frac{1}{2+a}\\
&\implies \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2+a}} = \pm\frac{V}{\sqrt{2(v^2+gh)}}\\
&\implies \alpha = \arcsin\Big(\pm\frac{1}{\sqrt{2+a}}\Big). \qquad (\star)
\end{aligned}
$$

Der negative Wert von α liegt nicht im Definitionsbereich, folglich ist $\alpha \approx 0,6561$ oder $\alpha \approx 41°$.

Wir testen das Vorzeichen der 2. Ableitung an dieser Stelle. Es ist

$$
w''(\alpha) = b\cdot\Bigg[\underbrace{-2\sin\alpha\Big(\cos\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2\cdot\sqrt{\sin^2\alpha + a}}\Big)}_{:=S_1} +
$$

$$
\underbrace{\cos\alpha}_{:=r}\Bigg(\underbrace{-2\sin\alpha}_{:=S_2}\underbrace{-\sqrt{\sin^2\alpha + a} + \frac{\cos 2\alpha\cdot\sqrt{\sin^2\alpha + a} - \frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + a}}}{\sin^2\alpha + a}}_{:=S_3}\Bigg)\Bigg].
$$

Wegen $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ist offenbar $S_1 < 0$, $r > 0$ und somit $rS_2 < 0$. Es bleibt noch nachzuweisen, daß auch $S_3 < 0$.

Um uns die Schreibarbeit zu erleichtern, setzen wir $c := \sqrt{\sin^2\alpha + a}$ (> 0). Dann ist wegen $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ und $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$:

$$
\begin{aligned}
S_3 &= -c + \frac{1}{c^2}\Big((1 - 2\sin^2\alpha)\cdot c - \frac{\sin^2\alpha\cdot(1-\sin^2\alpha)}{c}\Big)\\
&= \frac{1}{c^3}\Big(\underbrace{-c^4 + (1-2\sin^2\alpha)\cdot c^2 - \sin^2\alpha\cdot(1-\sin^2\alpha)}_{:=S_4}\Big).
\end{aligned}
$$

Wegen $\frac{1}{c^3} > 0$ genügt es nachzuweisen, daß $S_4 < 0$. Aufgrund von $(\star)$ ist $\sin^2\alpha = \frac{1}{2+a}$ und somit

$$
\begin{aligned}
c^2 &= \sin^2\alpha + a = \frac{1}{a+2} + a = \frac{(a+1)^2}{a+2}, \quad \text{also}\\
S_4 &= -\frac{(a+1)^4}{(a+2)^2} + \Big(1 - \frac{2}{a+2}\Big)\cdot\frac{(a+1)^2}{a+2} - \frac{1}{a+2}\Big(1 - \frac{1}{a+2}\Big)\\
&= -\frac{1}{(a+2)^2}\Big((a+1)^4 - a(a+1)^2 + (a+1)\Big)\\
&= -\frac{a+1}{(a+2)^2}(a^3 + 2a^2 + 2a + 2) < 0.
\end{aligned}
$$

Folglich besitzt f an der Stelle α ein lokales Maximum, das gleichzeitig globales Maximum ist.

7.47 Ein Gefäß mit senkrechter Wandung stehe auf einer horizontalen Ebene. Seine Höhe sei h. Aus einer (waagerechten) Öffnung in der Gefäßwand dringe ein Flüssigkeitsstrahl. **12/7/48/1**

Man bestimme die Lage der Öffnung, für die der Strahl die größte Weite erzielt, wenn die Geschwindigkeit der ausströmenden Flüssigkeit nach dem Gesetz von TORRICELLI gleich $\sqrt{2gx}$ ist, wobei x die Höhe der Öffnung unter dem Flüssigkeitsspiegel angibt.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.47 Durch $\frac{h}{2}$ ist die Höhe der Öffnung in der Gefäßwand über der Ebene gegeben. **12/7/48/2**

Lösung zu Aufgabe 7.47 Sei u die Austrittshöhe des Strahls aus der Gefäßwand, also $x = h - u$. Dann ist die Austrittsgeschwindigkeit $v = \sqrt{2g(h-u)}$. **12/7/48/3**

Die Wurfparabel (waagerechter Wurf in einem x-y-Koordinatensystem) ist gegeben durch $y = -\frac{g}{2v^2} \cdot x^2$. Für $y = -u$ trifft der Strahl offenbar auf die horizontale Ebene auf. Daraus ergibt sich die Weite x des Strahls wie folgt:

$$-u = -\frac{g}{2v^2} \cdot x^2 \iff x^2 = \frac{2uv^2}{g} = 4(hu - u^2), \text{ also}$$

$$x = x(u) = 2\sqrt{hu - u^2}.$$

Wir suchen ein globales Maximum von $x(u)$. Dazu untersuchen wir $x(u)$ auf lokale Extrema. Es ist

$$x'(u) = \frac{h - 2u}{\sqrt{hu - u^2}}, \quad x''(u) = \frac{-4(hu - u^2) - (h - 2u)^2}{2 \cdot \sqrt{(hu - u^2)^3}} \quad \text{und}$$

$$x'(u) = 0 \iff u = \frac{h}{2}.$$

Weiterhin ist

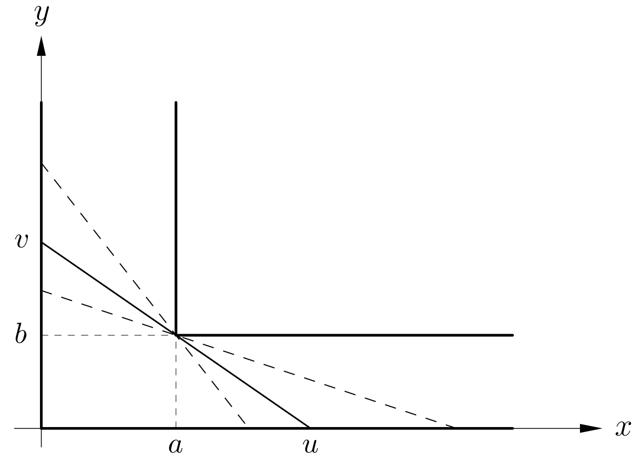
$$x''\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{-h^2}{2 \cdot \sqrt{(\frac{h^2}{4})^3}} = -\frac{4}{h} < 0.$$

Folglich besitzt $x(u)$ an der Stelle $u = \frac{h}{2}$ ein lokales Maximum der Größe $x\left(\frac{h}{2}\right) = h$. Der Definitionsbereich von $v(u)$ ist $[0, h]$. Vergleicht man $x\left(\frac{h}{2}\right)$ mit $x(0) = 0 = x(h)$, so ergibt sich, daß x an der Stelle $\frac{h}{2}$ ein globales Maximum besitzt.

7.48 Von einem Kanal der Breite a gehe unter einem rechten Winkel ein anderer Kanal mit der Breite b aus. Die Wände der Kanäle seien geradlinig. **12/7/49/1**
Wie lang darf ein Balken (dessen Breite unberücksichtigt bleibt) höchstens sein, der von einem Kanal in den anderen geflößt werden soll?

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.48 Es sei $u_0 = \sqrt[3]{b^2 \cdot a} + a$ (u_0 ist die kritische Stelle der Funktion, von der die Länge des Balkens abhängt.) **12/7/49/2**
Die maximale Länge des Balkens beträgt $\frac{u_0}{u_0 - a} \cdot \sqrt{(u_0 - a)^2 + b^2}$.

Lösung zu Aufgabe 7.48 **12/7/49/3**



Die Zeichnung symbolis
ineinander übergehenden
mit den zugehörigen B
bzw. b und die möglichen
der Balken, die von dem
den anderen Kanal geflöß
sollen.

Der längste Balken, der gefloßt werden kann, werde durch die Strecke A zwischen $(u, 0)$ und $(0, v)$ dargestellt. Die Gleichung der Geraden durch die Punkte $(u, 0)$, $(0, v)$ (auf der auch (a, b) liegen soll) ist gegeben durch $y = -\frac{v}{u} \cdot x + v$. Da (a, b) auf der Geraden liegt, erhält man

$$b = -\frac{v}{u} \cdot a + v \quad \text{und somit} \quad v = \frac{bu}{u-a}.$$

Die Länge des Balkens beträgt

$$l(u) = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{u^2 + \frac{b^2u^2}{(u-a)^2}} := A.$$

Der längste noch zu flößende Balken wird durch das globale Minimum (vgl. Zeichnung) von $l(u)$ gegeben. Wir bilden

$$l'(u) = \frac{2u + \frac{2b^2u(u-a) - 2b^2u^2}{(u-a)^3}}{2A} = \frac{u \cdot \left((u-a)^3 - b^2a\right)}{(u-a)^3 \cdot A}.$$

Es ist

$$l'(u) = 0 \iff u = 0 \text{ oder } u = \sqrt[3]{b^2a} + a.$$

$u = 0$ scheidet als Lösung offenbar aus; es bleibt $u = u_0 = \sqrt[3]{b^2a} + a$ zu berücksichtigen.

Da die 2. Ableitung relativ kompliziert zu handhaben ist, benutzen wir zum Nachweis eines Minimums andere Hilfsmittel.

Wir zeigen: In einer linksseitigen bzw. rechtsseitigen Umgebung von u_0 ist $l(u)$ streng monoton fallend bzw. wachsend. Aufgrund ihrer Stetigkeit besitzt die Funktion $l(u)$ an der Stelle u_0 dann ein lokales Minimum.

Sei $0 < \varepsilon < \min\{1, \sqrt[3]{b^2a}\}$.

1. Fall: $u = u_0 + \varepsilon$.
Dann ist $u - a = \sqrt[3]{b^2a} + \varepsilon > 0$, also auch $(u-a)^3 > 0$ und somit $(u-a)^3 \cdot A > 0$.
Wegen $(u-a)^3 - b^2a = \left(\sqrt[3]{b^2a} + \varepsilon\right)^3 - b^2a > 0$ ist auch $l'(u) > 0$. Folglich ist $l(u)$ in einer rechtsseitigen Umgebung von u_0 streng monoton wachsend.

2. Fall: $u = u_0 - \varepsilon$.
Dann ist $u - a = \sqrt[3]{b^2 a} - \varepsilon > 0$, also auch $(u-a)^3 > 0$ und somit $(u-a)^3 \cdot A > 0$. Wegen

$$\begin{aligned}(u-a)^3 - b^2 a &= \left(\sqrt[3]{b^2 a} - \varepsilon\right)^3 - b^2 a \\ &= -3 \cdot \left(\sqrt[3]{b^2 a}\right)^2 \cdot \varepsilon + 3 \cdot \sqrt[3]{b^2 a} \cdot \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \\ &= -\varepsilon\Big(3 \cdot \sqrt[3]{b^2 a}(\sqrt[3]{b^2 a} - \varepsilon) + \varepsilon^2\Big) < 0\end{aligned}$$

ist $l(u)$ in einer linksseitigen Umgebung von u_0 streng monoton fallend. Damit erweist sich $l(u_0)$ schließlich auch als globales Minimum von l mit der Größe

$$l(u_0) = \frac{u_0}{u_0 - a} \cdot \sqrt{(u_0 - a)^2 + b^2}.$$

7.49 Es sei $\mathfrak{k} := \{(t, t^2) \in \mathbb{R} : t \in \mathbb{R}\}$. **12/7/50/1**
Bestimmen Sie den Punkt von $\mathfrak{k}$, der dem Punkt $(6, 3) \in \mathbb{R}$ am nächsten liegt (falls ein solcher existiert).

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.49 Der minimale Abstand beträgt $\sqrt{17}$. **12/7/50/2**

Lösung zu Aufgabe 7.49 Der Abstand $A(t)$ der Punkte (t, t^2) und $(6, 3)$ beträgt **12/7/50/3**
$A(t) = \sqrt{(t-6)^2 + (t^2-3)^2}$. Wir suchen ein globales Minimum von $A(t)$. Dazu untersuchen wir $A(t)$ zunächst auf lokale Extrema. Es ist

$$A'(t) = \frac{2t^3 - 5t - 6}{\sqrt{(t-6)^2 + (t^2-3)^2}} \quad \text{und}$$

$$A''(t) = \frac{(6t^2 - 5)\sqrt{(t-6)^2 + (t^2-3)^2} - \frac{(2t^3-5t-6)^2}{\sqrt{(t-6)^2+(t^2-3)^2}}}{(t-6)^2 + (t^2-3)^2}.$$

Es ist

$$A'(t) = 0 \iff 2t^3 - 5t - 6 = 0.$$

Eine Lösung $t = 2$ läßt sich erraten. Division von $2t^3 - 5t - 6$ durch $t - 2$ ergibt das quadratische Polynom $2t^2 + 4t + 3$, das keine (reelle) Nullstelle besitzt. Folglich ist $t = 2$ einzige Nullstelle von $A'(t)$. Es gilt:

$$A''(2) = \frac{19 \cdot \sqrt{17}}{17} > 0.$$

Damit besitzt $A(t)$ an der Stelle $t = 2$ ein lokales Minimum, das gleichzeitig globales Minimum ist, und es gilt: $A(2) = \sqrt{17}$.

7.50 Eine zylinderförmige Blechbüchse mit einem Liter Inhalt soll mit möglichst wenig **12/7/51/1**
Materialaufwand hergestellt werden (Oberfläche minimal).
Geben Sie die Abmessungen einer solchen Büchse an.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.50 Es sei r der Radius und h die Höhe der Blechbüchse. Durch $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ und $h = \frac{1}{\pi r^2}$ sind die Abmessungen der Büchse gegeben. **12/7/51/2**

Lösung zu Aufgabe 7.50 Es sei r der Radius und h die Höhe der Blechbüchse. Die Oberfläche beträgt dann $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$ und das Volumen $V = r^2\pi h = 1$. Hieraus läßt sich h in Abhängigkeit von r bestimmen: $h = \frac{1}{\pi r^2}$. Damit erhält man **12/7/51/3**

$$O = O(r) = 2\pi r^2 + \tfrac{2}{r}.$$

Wir suchen ein globales Minimum von O. Dazu untersuchen wir $O(r)$ zunächst auf lokale Extrema. Es ist

$$O'(r) = 4\pi r - \tfrac{2}{r^2} \quad \text{und} \quad O''(r) = 4\pi + \tfrac{4}{r^3}.$$

Dann gilt:

$$O'(r) = 0 \iff r^3 = \tfrac{1}{2\pi} \iff r = \tfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad \text{und}$$

$$O''\Big(\tfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\Big) = 4\pi + \tfrac{4}{2\pi} > 0.$$

Folglich besitzt O an der Stelle $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ ein lokales Minimum, das gleichzeitig globales Minimum ist. Mit $h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{(\sqrt[3]{2\pi})^2}{\pi}$ erhält man auch die Höhe der Büchse. Offenbar ist $\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$ und $O\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\Big) = 2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi^2}} + 2\cdot\sqrt[3]{2\pi} = 3\cdot\sqrt[3]{2\pi}$.

7.51 Die Magnetisierungskurve von Eisen ist nach KOEPPEL durch $B = \mathrm{e}^{\frac{H}{a+bH}}$ gegeben (H ist die magnetische Feldstärke, B die Induktion, a, b sind Konstanten). **12/7/52/1**
Für welchen Wert von H hat die Permeabilität $\mu = \frac{B}{H}$ einen größten bzw. kleinsten Wert?

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.51 Für $a = 0$ besitzt $\mu = \mu(H)$ kein Extremum. **12/7/52/2**
Sei nun $a \neq 0$.
Für $b = 0$ und $a < 0$ bzw. $a > 0$ besitzt $\mu(H)$ an der Stelle $H = a$ (einzige kritische Stelle) ein lokales Maximum bzw. Minimum (dies sind auch gleichzeitig globale Extrema).

Sei jetzt $a \neq 0$ und $b \neq 0$.
Für $b \geq \frac{1}{4}$ besitzt $\mu(H)$ kein Extremum.

Sei nun $b < \frac{1}{4}$. Die kritischen Stellen sind

$$H_1 = \tfrac{a}{2b^2}\cdot\Big(1 - 2b - \sqrt{1-4b}\Big), \quad H_2 = \tfrac{a}{2b^2}\cdot\Big(1 - 2b + \sqrt{1-4b}\Big).$$

Für $a > 0$ besitzt $\mu(H)$ in H_1 ein lokales Minimum und in H_2 ein lokales Maximum.
Für $a < 0$ kehren sich die Verhältnisse um.

Offenbar besitzt $\mu(H)$ kein globales Extremum.

Lösung zu Aufgabe 7.51 Wir suchen Extrema von $\mu(H) = \frac{B}{H}$, wobei $B = e^{\frac{H}{a+bH}}$, $D(\mu) = \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{a}{b}\}$ (falls $b \neq 0$) und a, b nicht beide null sind. **12/7/52/3**

Wenn $a = 0$, so $\mu(H) = \frac{1}{H} \cdot e^{\frac{1}{b}}$. Folglich besitzt $\mu(H)$ kein Extremum.

Von nun an sei $a \neq 0$.

Ist $b = 0$, so $D(\mu) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mu(H) = \frac{1}{H} \cdot e^{\frac{H}{a}}$. Weiterhin ist

$$\mu'(H) = e^{\frac{H}{a}} \cdot \frac{1}{H} \cdot \Big(\frac{1}{a} - \frac{1}{H}\Big) \quad \text{und} \quad \mu''(H) = e^{\frac{H}{a}} \cdot \frac{1}{aH} \cdot \Big(\frac{2a}{H^2} - \frac{2}{H} + \frac{1}{a}\Big).$$

Folglich ist

$$\mu'(H) = 0 \iff H = a \quad \text{und} \quad \mu''(H) = \frac{e}{a^3}.$$

Für $a < 0$ ist $\mu''(a) < a$ und somit $\mu(a)$ ein lokales Maximum; für $a > 0$ ist $\mu''(a) > 0$ und somit $\mu(a)$ ein lokales Minimum. Offenbar sind dies auch globale Extrema.

Sei jetzt stets $b \neq 0$ (also $a \neq 0$ und $b \neq 0$). Dann ist

$$\begin{aligned}\mu'(H) &= B \cdot \Big(\frac{a}{H(a+bH)^2} - \frac{1}{H^2}\Big) \\ &= \underbrace{-\frac{B}{H^2(a+bH)^2}}_{:=f(H)} \cdot \Big(\underbrace{-aH + (a+bH)^2}_{:=p(H)}\Big)\end{aligned}$$

und

$$\mu'(H) = 0 \iff p(H) = 0 \iff H = \frac{a}{2b^2} \cdot \Big(1 - 2b \pm \sqrt{1-4b}\Big).$$

Für $b > \frac{1}{4}$ besitzt $\mu'(H)$ keine (reelle) Nullstelle und damit auch kein (lokales oder globales) Extremum.

Sei jetzt $b \leq \frac{1}{4}$.

Da der Umgang mit der 2. Ableitung von μ relativ kompliziert ist, benutzen wir zum Nachweis lokaler Extrema andere Hilfsmittel.

Wegen $\mu'(H) = f(H) \cdot p(H)$ und $f(H) < 0$ für alle H hängt das Vorzeichen von $\mu'(H)$ nur von $p(H)$ ab. Es seien

$$H_1 = \frac{a}{2b^2} \cdot \Big(1 - 2b - \sqrt{1-4b}\Big) \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{a}{2b^2} \cdot \Big(1 - 2b + \sqrt{1-4b}\Big).$$

Wenn $b = \frac{1}{4}$, so $H_1 = H_2 = 4a$ und $p(H) \geq 0$ für alle H und $p(H) = 0 \iff H = 4a$. Folglich ist $\mu(H)$ im gesamten Definitionsbereich streng monoton fallend (die Vorzeichen von $\mu'(H)$ und $p(H)$ sind entgegengesetzt), besitzt also kein Extremum.

Es bleibt $b < \frac{1}{4}$ zu betrachten.

Für $a > 0$ ist $0 < H_1 < H_2$ und für $a < 0$ ist $H_2 < H_1 < 0$. Durch eine einfache Abschätzung zeigt man, daß $-\frac{a}{b}$ $\big($Definitionslücke von $\mu(H)\big)$ nicht zwischen H_1 und H_2 liegt.

Sei zunächst $a > 0$. Dann ist offenbar $p(H)$ in einer linksseitigen Umgebung $U_l(H_1)$ positiv und in einer rechtsseitigen Umgebung $U_r(H_1)$ negativ. Folglich ist $\mu(H)$ in

$U_l(H_1)$ streng monoton fallend und in $U_r(H_1)$ streng monoton wachsend. $\mu(H)$ besitzt also an der Stelle H_1 ein lokales Minimum. Analog zeigt man, daß $\mu(H)$ an der Stelle H_2 ein lokales Maximum besitzt. Wegen

$$\lim_{\substack{H\to 0\\ H>0}} \mu(H) = \infty, \quad \lim_{h\to\infty} \mu(H) = 0 \quad \text{und} \quad \mu(H_1) = \frac{1}{H_1}\cdot \mathrm{e}^{\frac{H_1}{a+bH_1}} > 0$$

hat $\mu(H)$ kein globales Extremum.

Für $a < 0$ besitzt $\mu(H)$ (analog wie oben) an der Stelle H_1 ein lokales Maximum und an der Stelle H_2 ein lokales Minimum. Wegen

$$\lim_{\substack{H\to 0\\ H<0}} \mu(H) = -\infty, \quad \lim_{h\to -\infty} \mu(H) = 0 \quad \text{und} \quad \mu(H_1) = \frac{1}{H_1}\cdot \mathrm{e}^{\frac{H_1}{a+bH_1}} < 0$$

hat $\mu(H)$ kein globales Extremum.

12.8 Differentialrechnung (mehrere Veränderliche)

8.1 Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. **12/8/1/1**
Man bilde (mit Hilfe der Kettenregel) die Ableitung von $f\circ g$, wobei:
(a) $f(x,y) = \sin(xy), \quad g(t) = (t, t^2)$.
(b) $f(x,y) = x\sin(xy), \quad g(t) = (t^2, \ln(t^2+1))$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.1 (a) $(f\circ g)'(t) = 3t^2\cdot\cos(t^3)$. **12/8/1/2**

(b) $(f\circ g)'(t) = 2t\cdot\sin(t^2\cdot\ln(t^2+1)) + \Big(2t^3\cdot\ln(t^2+1) + \frac{2t^5}{t^2+1}\Big)\cdot\cos(t^2\cdot\ln(t^2+1))$.

Lösung zu Aufgabe 8.1 Nach der Kettenregel (vgl. 8/1/32) gilt: **12/8/1/3**

$$(f\circ g)'(t) = f'(g(t))\cdot g'(t) = f_x(g(t))\cdot g_1'(t) + f_y(g(t))\cdot g_2'(t).$$

(a) Für $f(x,y) = \sin(xy)$ und $g(t) = (t,t^2) = (g_1(t), g_2(t))$ gilt:

$$f_x(x,y) = \cos(xy)\cdot y, \quad f_y(x,y) = \cos(xy)\cdot x \quad \text{und} \quad g_1'(t) = 1,\ g_2'(t) = 2t.$$

Also

$$(f\circ g)'(t) = \cos(t^3)\cdot t^2 + \cos(t^3)\cdot t\cdot 2t = 3t^2\cdot\cos(t^3).$$

(b) Für $f(x,y) = x\cdot\sin(xy)$ und $g(t) = (t^2, \ln(t^2+1)) = (g_1(t), g_2(t))$ gilt:

$$f_x(x,y) = \sin(xy) + xy\cdot\cos(xy), \quad f_y(x,y) = x^2\cos(xy) \quad \text{und}$$
$$g_1'(t) = 2t,\ g_2'(t) = \frac{2t}{t^2+1}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(t) &= [\sin(t^2\cdot\ln(t^2+1)) + t^2\cdot\ln(t^2+1)\cdot\cos(t^2\cdot\ln(t^2+1))]\cdot 2t \\ &\qquad + t^4\cdot\cos(t^2\cdot\ln(t^2+1))\cdot\frac{2t}{t^2+1} \\ &= 2t\cdot\sin(t^2\cdot\ln(t^2+1)) + \Big(2t^3\cdot\ln(t^2+1) + \frac{2t^5}{t^2+1}\Big)\cdot\cos(t^2\cdot\ln(t^2+1)).\end{aligned}$$

8.2 Bestimmen Sie die (totale) Ableitung der folgenden Funktionen: **12/8/2/1**

(a) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, (c) $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$,

(b) $f(x, y) = \ln \tan \frac{x}{y}$, (d) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.2 (a) $f'(x, y) = \Big(\cos(x^2 + y^2) \cdot 2x,\ \cos(x^2 + y^2) \cdot 2y\Big)$. **12/8/2/2**

(b) $f'(x, y) = \Big(\frac{1}{y \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{x}{y}},\ \frac{-x}{y^2 \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{x}{y}}\Big)$.

(c) $f'(x, y) = \Big(\frac{y}{x^2 + y^2},\ \frac{-x}{x^2 + y^2}\Big)$.

(d) $f'(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot (x, y, z)$.

Lösung zu Aufgabe 8.2 Sei $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, dann ist $f'(\overline{x}) = (f_{x_1}(\overline{x}), \ldots, f_{x_n}(\overline{x}))$. **12/8/2/3**

(a) Für $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ ist

$$f'(x, y) = \Big(\cos(x^2 + y^2) \cdot 2x,\ \cos(x^2 + y^2) \cdot 2y\Big).$$

(b) Für $f(x, y) = \ln \tan \frac{x}{y}$ ist

$$f_x(x, y) = \frac{1}{\tan \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{x}{y}} \quad \text{und}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{\tan \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2 \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{x}{y}}.$$

Also

$$f'(x, y) = \Big(f_x(x, y),\ f_y(x, y)\Big) = \Big(\frac{1}{y \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{x}{y}},\ \frac{-x}{y^2 \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{x}{y}}\Big).$$

(c) Für $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ ist

$$f_x(x, y) = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{und}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \cdot \Big(\frac{-x}{y^2}\Big) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Folglich ist

$$f'(x, y) = \Big(\frac{y}{x^2 + y^2},\ \frac{-x}{x^2 + y^2}\Big).$$

(d) Für $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist

$$f_x(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ldots, f_z(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Also

$$f'(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot (x, y, z).$$

8.3 (a) Berechnen Sie die Gradienten von **12/8/3/1**

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{und} \quad f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

(b) Bestimmen Sie für $f(x, y) = x^2 - y^2$ in den Punkten $(1, 1)$ und $(-1, 1)$ die Richtungsableitung in Richtung $\overline{a} = (r_1, r_2)$ und in Richtung $-\overline{a}$, wobei $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.3 (a) $\operatorname{grad} f(x,y,z) = -\left(\frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{z^2}\right).$ **12/8/3/2**

(b) $f_{\overline{a}}(1,1) = 0;\quad f_{-\overline{a}}(1,1) = 0;\quad f_{\overline{a}}(-1,1) = -2\sqrt{2};\quad f_{-\overline{a}}(-1,1) = 2\sqrt{2}.$

Lösung zu Aufgabe 8.3 **12/8/3/3**

(a) Für $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ist

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \ldots, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).$$

Für $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ist

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{-1}{x^2}, \frac{-1}{y^2}, \frac{-1}{z^2}\right) = -\left(\frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{z^2}\right).$$

(b) Für $\overline{a} = (r_1, r_2)$ mit $|\overline{a}| = 1$ und $\overline{c} = (c_1, c_2)$ ist die Richtungsableitung von f an der Stelle $\overline{c}$ gegeben durch $f_{\overline{a}}(\overline{c}) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\overline{c}+h\overline{a}) - f(\overline{c})}{h}$ (vgl. 8/1/7).

Folglich gilt für $f(x,y) = x^2 - y^2$:

$$f_{\overline{a}}(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+\frac{h}{2}\sqrt{2},\, 1+\frac{h}{2}\sqrt{2}) - f(1,1)}{h} = 0,$$

$$f_{-\overline{a}}(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1-\frac{h}{2}\sqrt{2},\, 1-\frac{h}{2}\sqrt{2}) - f(1,1)}{h} = 0,$$

$$f_{\overline{a}}(-1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+\frac{h}{2}\sqrt{2},\, 1+\frac{h}{2}\sqrt{2}) - f(-1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h\sqrt{2}}{h} = -2\sqrt{2},$$

$$f_{-\overline{a}}(-1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1-\frac{h}{2}\sqrt{2},\, 1-\frac{h}{2}\sqrt{2}) - f(-1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h\sqrt{2}}{h} = 2\sqrt{2}.$$

8.4 Man berechne die Gleichung der Tangentialebene für **12/8/4/1**

(a) das Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2$,

(b) die Halbkugel $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$,

(c) die Sattelfläche $z = x \cdot y$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.4 (a) $t(\overline{x}) = a^2 + b^2 + 2a(x-a) + 2b(y-b).$ **12/8/4/2**

(b) $t(\overline{x}) = \sqrt{r^2-a^2-b^2} - \frac{a(x-a)}{\sqrt{r^2-a^2-b^2}} - \frac{b(y-b)}{\sqrt{r^2-a^2-b^2}}.$

(c) $t(\overline{x}) = ab + b(x-a) + a(y-b).$

Lösung zu Aufgabe 8.4 Die Gleichung der Tangentialebene von f an einer Stelle $\overline{c} \in D(f)$ ist gegeben durch **12/8/4/3**

$$t(\overline{x}) = f(\overline{c}) + f'(\overline{c})\cdot(\overline{x} - \overline{c}).$$

Im Folgenden sei $\overline{x} = (x,y)$ und $\overline{c} = (a,b) \in D(f)$.

(a) Für $f(\overline{x}) = x^2 + y^2$ ist $f_x(\overline{c}) = 2a$ und $f_x(\overline{c}) = 2b$, also

$$t(\overline{x}) = a^2 + b^2 + 2a(x-a) + 2b(y-b).$$

(b) Für $f(\overline{x}) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ ist $f_x(\overline{c}) = -\frac{-a}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}}$ und $f_x(\overline{c}) = -\frac{-b}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}}$.
Folglich ist

$$t(\overline{x}) = \sqrt{r^2 - a^2 - b^2} - \frac{a(x-a)}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}} - \frac{b(y-b)}{\sqrt{r^2 - a^2 - b^2}}.$$

(c) Für $f(\overline{x}) = xy$ ist $f_x(\overline{c}) = b$ und $f_y(\overline{c}) = a$, also

$$t(\overline{x}) = ab + b(x-a) + a(y-b).$$

8.5 (a) Für $f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ beweise man, daß **12/8/5/1**

$$f_x + f_y + f_z = \frac{3}{x+y+z}.$$

(b) Für $f(x, y, z) = \frac{4\pi a^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ beweise man, daß $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.5 (a) $f_x(\overline{x}) + f_y(\overline{y}) + f_z(\overline{z}) = \frac{3}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = \frac{3}{x+y+z}$. **12/8/5/2**

(b) $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 4\pi a^3 (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2) = 0$.

Lösung zu Aufgabe 8.5 Sei $\overline{x} = (x, y, z)$. **12/8/5/3**

(a) Für $f(\overline{x}) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ ist

$$f_x(\overline{x}) = \frac{1}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \cdot (3x^2 - 3yz),$$
$$f_y(\overline{x}) = \frac{1}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \cdot (3y^2 - 3xz),$$
$$f_z(\overline{x}) = \frac{1}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \cdot (3z^2 - 3xy).$$

Folglich ist

$$f_x(\overline{x}) + f_y(\overline{y}) + f_z(\overline{z}) = \frac{3}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Wegen

$$(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \cdot (x + y + z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

ist

$$f_x(\overline{x}) + f_y(\overline{y}) + f_z(\overline{z}) = \frac{3}{x+y+z}.$$

(b) Sei $g(\overline{x}) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$. Dann ist

$$g_x(\overline{x}) = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}},$$
$$g_y(\overline{y}) = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}},$$
$$g_z(\overline{z}) = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

und somit

$$\begin{aligned} g_{xx}(\overline{x}) &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \\ &= (3x^2 - x^2 - y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$g_{yy}(\overline{x}) = (3y^2 - x^2 - y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \quad \text{und}$$
$$g_{zz}(\overline{x}) = (3z^2 - x^2 - y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\Delta f := f_{xx}+f_{yy}+f_{zz} &= 4\pi a^3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(3x^2+3y^2+3z^2-3x^2-3y^2-3z^2)\\ &= 0.\end{aligned}$$

8.6 (a) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$ im Punkt (a,b) in beiden Richtungen der Geraden $y - b = (a-x)\cdot\tan b$. **12/8/6/1**

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$ in den Punkten $(1,1)$ und $(-1,-1)$ in Richtung der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.6 Für $\overline{c} := (a,b)$ und $\overline{r} := (r_1, r_2)$ mit $|\overline{r}| = 1$ gilt: **12/8/6/2**

(a) $f'(\overline{c}) = (\mathrm{e}^a\cdot\sin b,\, \mathrm{e}^a\cdot\cos b)$. Speziell für die durch $\overline{c}_1 := (1, -\tan b)$ bzw. $\overline{c}_2 := (-1, \tan b)$ gegebenen Richtungen ist dann

$f_{\overline{r}_i}(\overline{c}) = \mathrm{e}^a \sin b\cdot\cos b + \mathrm{e}^a\cos b\cdot(-\sin b) = 0$ für $i = 1,2$, wobei $\overline{r}_i = \frac{\overline{c}_i}{|\overline{c}_i|}$.

(b) Für $\overline{r} = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ ist $f_{\overline{r}}(1,1) = 0$ und $f_{\overline{r}}(-1,-1) = 0$.

Lösung zu Aufgabe 8.6 Für $\overline{c} = (a,b)$ und $\overline{r} = (r_1, r_2)$ ist $f_{\overline{r}} = f'(\overline{c})\cdot\overline{r}$ (vgl. 8/1/25). **12/8/6/3**

(a) Es ist $f'(\overline{c}) = (\mathrm{e}^a\cdot\sin b,\, \mathrm{e}^a\cdot\cos b)$ und somit

$$f_{\overline{r}}(\overline{c}) = \mathrm{e}^a \sin b\cdot r_1 + \mathrm{e}^a\cos b\cdot r_2.$$

Durch $y = b + (a-x)\cdot\tan b$ ist eine Gerade gegeben. Wir betrachten die Stellen $x_1 := a+1$ bzw. $x_2 := a-1$. Dann ist

$$y_1 = b + (a - x_1)\cdot\tan b = b - \tan b \quad \text{und}$$
$$y_2 = b + (a - x_2)\cdot\tan b = b + \tan b.$$

Durch $\overline{c}_1 = (x_1, y_1) - (a,b) = (1, -\tan b)$ und $\overline{c}_2 = (x_2, y_2) - (a,b) = (-1, \tan b)$ sind die Richtungen gegeben. Weiterhin ist

$$|\overline{c}_i| = \sqrt{1+\tan^2 b} = \frac{1}{|\cos b|} \quad \text{für } i = 1,2,$$

also $|\overline{r}_i| = 1$ mit $\overline{r}_i = \frac{\overline{c}_i}{|\overline{c}_i|}$.

1. Fall: $\tan b = 0 \Longrightarrow \sin b = 0$ und $\overline{r}_i = (\pm 1, 0)$. Folglich ist $f_{\overline{r}_i}(\overline{c}) = 0$.

2. Fall: $\tan b \neq 0$. Für $\cos b > 0$ ist $\overline{r}_1 = (\cos b, -\sin b)$, für $\cos b < 0$ ist $\overline{r}_2 = (\cos b, -\sin b)$, und somit

$$f_{\overline{r}_i}(\overline{c}) = \mathrm{e}^a \sin b\cdot\cos b + \mathrm{e}^a\cos b\cdot(-\sin b) = 0 \quad \text{für } i = 1,2.$$

(b) Sei $\overline{r} = (\frac{1}{2}\sqrt{2},\, \frac{1}{2}\sqrt{2})$. Dann ist

$$f_{\overline{r}}(1,1) = (2,-2)\cdot(\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = 0 \quad \text{und}$$
$$f_{\overline{r}}(-1,-1) = (-2,2)\cdot(\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = 0.$$

8.7 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \frac{1}{xy}$. **12/8/7/1**

(a) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene für f an der Stelle $(1,1)$ an.

(b) Es sei $M = \{(x,y) : |x-1| < \frac{1}{10},\ |y-1| < \frac{1}{10}\}$.
Wie groß ist die Abweichung zwischen f und der Tangentialebene in M (möglichst genau angeben)?

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.7 (a) $t(x,y) = 1 + (-1,-1)\cdot(x-1,\ y-1) = 3 - x - y$. **12/8/7/2**

(b) $|f(x,y) - t(x,y)| = |\frac{1}{xy} - 3 + x + y| \leq \frac{16}{405}$.

Lösung zu Aufgabe 8.7 **12/8/7/3**

(a) Es ist $f_x(x,y) = -\frac{1}{x^2y}$, $\quad f_y(x,y) = -\frac{1}{xy^2}$ und somit

$$\begin{aligned} t(x,y) &= f(1,1) + f'(1,1)\cdot(x-1,\ y-1) \\ &= 1 + (-1,-1)\cdot(x-1,\ y-1) = 3 - x - y. \end{aligned}$$

(b) Es ist $|x-1| < \frac{1}{10} \iff \frac{9}{10} < x < \frac{11}{10}$ und $|y-1| < \frac{1}{10} \iff \frac{9}{10} < y < \frac{11}{10}$.
Sei $x := 1 + u$ und $y := 1 + v$ mit $|u|, |v| < \frac{1}{10}$. Dann ist

$$\begin{aligned} |f(x,y) - t(x,y)| &= \left|\frac{1}{xy} - 3 + x + y\right| \\ &= \left|\frac{1}{(1+u)(1+v)} + u + v - 1\right| \\ &= \left|\frac{1 + u + u^2 + uv + u^2v + v + uv + v^2 + uv^2}{(1+u)(1+v)} - 1\right| \\ &= \left|\frac{u^2 + u^2v + uv + v^2 + uv^2}{(1+u)(1+v)}\right| \\ &\leq \frac{\frac{3}{100} + \frac{2}{1000}}{(\frac{9}{10})^2} = \frac{16}{405}. \end{aligned}$$

8.8 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$. **12/8/8/1**
Unter welchen Bedingungen für a, b, c besitzt f genau einen kritischen Punkt?

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.8 $f'(x,y) = 0$ liefert $ax + by = 0$ und $bx + cy = 0$. **12/8/8/2**
Die Bedingung lautet $ac - b^2 \neq 0$.

Lösung zu Aufgabe 8.8 Für $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ bildet man die partiellen **12/8/8/3**
Ableitungen und setzt diese null. Es entsteht das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$ax + by = 0 \quad \text{und} \quad bx + cy = 0.$$

f besitzt genau einen kritischen Punkt $\iff$
das LGS besitzt genau eine Lösung $\iff$
die Determinante der Koeffizientenmatrix des LGS ist ungleich 0 $\iff$
$ac - b^2 \neq 0$.

8.9 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$ **12/8/9/1**

Bilden Sie (falls existent) alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f.
Was läßt sich über die gemischten Ableitungen aussagen?
Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Inhalt des Satzes von Schwarz.

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.9 Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt: **12/8/9/2**

$$f_x(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot (x^4y + 4x^2y^3 - y^5),$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^3} \cdot (-4x^3y^3 + 12xy^5),$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^3} \cdot (x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6),$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot (x^5 - 4x^3y^2 - xy^4),$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^3} \cdot (-12x^5y + 4x^3y^3),$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^3} \cdot (x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6).$$

Die gemischten Ableitungen stimmen überein; da f_x, f_y, f_{xy} existieren und f_{xy} stetig ist, folgt dies schon aus dem Satz von Schwarz.

Für $x = y = 0$ ist

$f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$ und $f_{xx}(0,0) = 0 = f_{yy}(0,0)$.

Weiterhin gilt:

$f_{xy}(0,0) = -1$ und $f_{yx}(0,0) = 1$.

Die gemischten Ableitungen stimmen nicht überein. Da f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} existieren, sind f_{xy} und f_{yx} in $(0,0)$ nicht stetig.

Lösung zu Aufgabe 8.9 Es ist $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$ **12/8/9/3**

1. Fall: $(x,y) \neq (0,0)$. In diesem Fall lassen sich die partiellen Ableitungen nach den üblichen Differentiationsregeln bilden, also

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot \Big((3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3) \cdot 2x \Big) \\ &= \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot (x^4y + 4x^2y^3 - y^5), \\ f_{xx}(x,y) &= \frac{1}{(x^2+y^2)^3} \cdot \Big((4x^3y + 8xy^3)(x^2+y^2) - (x^4y + 4x^2y^3 - y^5) \cdot 4x \Big) \\ &= \frac{1}{(x^2+y^2)^3} \cdot (-4x^3y^3 + 12xy^5), \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{1}{(x^2+y^2)^3} \cdot \Big((x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^2+y^2) - (x^4y + 4x^2y^3 - y^5) \cdot 4y \Big) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\cdot(x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6),$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot\Big((x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot 2y\Big)$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot(x^5-4x^3y^2-xy^4),$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\cdot\Big((-8x^3y-4xy^3)(x^2+y^2)-(x^5-4x^3y^2-xy^4)\cdot 4y\Big)$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\cdot(-12x^5y+4x^3y^3),$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\cdot\Big((5x^4-12x^2y^2-y^4)(x^2+y^2)-(x^5-4x^3y^2-xy^4)\cdot 4x\Big)$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\cdot(x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6).$$

Die gemischten Ableitungen stimmen überein. Aus dem Satz von Schwarz (vgl. 8/2/2) hätte man dies schon schließen können aufgrund der Existenz von f_x, f_y, f_{xy} und der Stetigkeit von f_{xy}.

2. Fall: $x = y = 0$. Wir untersuchen zunächst

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} \quad \text{und} \quad \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}.$$

Es ist $f(x,0) = f(0,0) = 0 = f(0,y)$. Folglich gilt:

$$f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0).$$

Wir betrachten jetzt die Limites der Differenzenquotienten von $f_x(x,0)$, $f_x(0,y)$, $f_y(x,0)$ und $f_y(0,y)$ an der Stelle 0. Es ist

$$\frac{f_x(x,0)-f_x(0,0)}{x-0} = 0 = \frac{f_y(0,y)-f_y(0,0)}{y-0}$$

und somit $f_{xx}(0,0) = 0$, $f_{yy}(0,0) = 0$. Weiterhin gilt:

$$\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y-0} = \frac{-\frac{y^5}{y^4}}{y} = -1 \quad \text{und} \quad \frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x-0} = \frac{\frac{x^5}{x^4}}{x} = 1,$$

also $f_{xy}(0,0) = -1$ und $f_{yx}(0,0) = 1$.

Für diesen Fall stimmen die gemischten Ableitungen nicht überein. Da f_x, f_y, f_{xy} bzw. f_{yx} existieren, sind f_{xy} bzw. f_{yx} in $(0,0)$ nicht stetig.

8.10 Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und f in M definiert. **12/8/10/1**
Weiterhin besitze f in jedem Punkt aus M partielle Ableitungen nach allen Variablen $x_1, \ldots, x_n$.
Zeigen Sie: Ist $\overline{a} \in M$ und sind alle partiellen Ableitungen in einer Umgebung von $\overline{a}$ beschränkt, dann ist f in $\overline{a}$ stetig.

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.10 Für $\overline{x}_i = (x_1, \ldots, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$; $i = 0, \ldots, n$, **12/8/10/2**
also $\overline{x}_0 = (a_1, \ldots, a_n) := \overline{a}$ und $\overline{x}_n = (x_1, \ldots, x_n) := \overline{x}$ schätze man die folgende Summe ab:

$|f(\overline{x}) - f(\overline{a})| =$

$$|f(\overline{x}_n) - f(\overline{x}_{n-1}) + f(\overline{x}_{n-1}) - f(\overline{x}_{n-2}) + f(\overline{x}_{n-2}) - \ldots - f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_0)|$$
$$\leq |f(\overline{x}_n) - f(\overline{x}_{n-1})| + |f(\overline{x}_{n-1}) - f(\overline{x}_{n-2})| + \ldots + |f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_0)|.$$

Damit erhält man schließlich die Behauptung.

Lösung zu Aufgabe 8.10 Sei $\overline{x}_i = (x_1, \ldots, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ für $i = 0, \ldots, n$, also $\overline{x}_0 = (a_1, \ldots, a_n) := \overline{a}$ und $\overline{x}_n = (x_1, \ldots, x_n) := \overline{x}$. Dann gilt: **12/8/10/3**

$$\begin{aligned}|f(\overline{x}) - f(\overline{a})| &= |f(\overline{x}_n) - f(\overline{x}_{n-1}) + f(\overline{x}_{n-1}) - f(\overline{x}_{n-2}) + f(\overline{x}_{n-2}) - \ldots - f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_0)| \\ &\leq |f(\overline{x}_n) - f(\overline{x}_{n-1})| + |f(\overline{x}_{n-1}) - f(\overline{x}_{n-2})| + \ldots + |f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_0)| \\ &= \left|\frac{f(\overline{x}_n) - f(\overline{x}_{n-1})}{x_n - a_n}\right| \cdot |x_n - a_n| + \ldots + \left|\frac{f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_0)}{x_1 - a_1}\right| \cdot |x_1 - a_1| \qquad \text{(vgl. 7/1/10)} \\ &= |f_{x_n}(\overline{x}_{n-1}) + o_n(x_n)| \cdot |x_m - a_n| + \ldots + |f_{x_1}(\overline{x}_0) + o_1(x_1)| \cdot |x_1 - a_1|.\end{aligned}$$

Da die partiellen Ableitungen in M beschränkt sind, $o_i(x_i) \xrightarrow[x_i \to a_i]{} 0$ und $\lim\limits_{x_i \to a_i} |x_i - a_i| = 0$, gilt: $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} |f(\overline{x}) - f(\overline{a})| = 0$. Folglich ist f in $\overline{a}$ stetig.

8.11 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale und globale Extrema: **12/8/11/1**

(a) $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2, \quad -2 \leq x \leq 2,\ -2 \leq y \leq 2,$

(b) $f(x, y) = x \cdot y + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \quad 1 \leq x \leq 10,\ 1 \leq y \leq 10,$

(c) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x - y), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$

Lösungshinweis zu Aufgabe 8.11 (a) f besitzt an der Stelle $\overline{c} := (0, 1)$ ein lokales Minimum der Größe $f(\overline{c}) = 0$; **12/8/11/2**

f besitzt kein globales Maximum. Ein Vergleich mit den Funktionswerten auf dem Rande des Definitionsbereiches zeigt, daß $f(\overline{c})$ gleichzeitig globales Minimum ist.

An den Stellen $(\pm 2, -2)$ besitzt f ein globales Maximum der Größe $f(\pm 2, -2) = 13$.

(b) An der Stelle $\overline{c} := (5, 2)$ besitzt f ein lokales Minimum der Größe $f(\overline{c}) = 30$; f besitzt kein globales Maximum. Ein Vergleich mit den Funktionswerten auf dem Rande des Definitionsbereiches zeigt, daß $f(\overline{c})$ gleichzeitig globales Minimum ist.

An der Stelle $(10, 10)$ besitzt f ein globales Maximum der Größe $f(10, 10) = 107$.

(c) f besitzt kein lokales Extremum (im Inneren des Definitionsbereiches). Die Einbeziehung der Funktionswerte auf dem Rande zeigt: f besitzt an den Stellen $(0, y)$ mit $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ein globales Minimum der Größe 0 und an der Stelle $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ ein globales Maximum der Größe $1 + \sqrt{2}$.

Lösung zu Aufgabe 8.11 Sei $\overline{c}$ ein innerer Punkt des Definitionsbereiches von f und **12/8/11/3**
$D := \begin{vmatrix} f_{xx}(\overline{c}) & f_{xy}(\overline{c}) \\ f_{xy}(\overline{c}) & f_{yy}(\overline{c}) \end{vmatrix}$.

Ist $D > 0$, dann besitzt f an der Stelle $\overline{c}$ ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Minimum bzw. Maximum, falls $f_{xx}(\overline{c}) > 0$ bzw. $f_{xx}(\overline{c}) < 0$ (vgl. 3/2/22). Um die globalen Extrema der Funktion f zu finden, betrachten wir f auch auf dem Rand des Definitionsbereiches, insbesondere in den Eckpunkten der rechteckigen Bereiche.

(a) Sei $f(x,y) = x^2+(y-1)^2$ und $-2 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 2$. Wir bestimmen zunächst die kritischen Punkte.
Es ist $f_x(x,y) = 2x$ und $f_y(x,y) = 2(y-1)$. Daraus ergibt sich der einzige kritische Punkt $\overline{c} := (0,1)$. Nur dort kann f ein lokales Extremum besitzen (vgl. 8/3/18).
Es ist

$$D = f_{xx}(\overline{c})\cdot f_{yy}(\overline{c}) - f_{xy}^2(\overline{c}) = 2\cdot 2 - 0 = 4 > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(\overline{c}) = 2 > 0.$$

Folglich besitzt f an der Stelle $\overline{c}$ ein lokales Minimum der Größe $f(0,1) = 0$.
Wir betrachten jetzt f auf dem Rand des Definitionsbereiches.
Sei $x = \pm 2$ und $-2 \le y \le 2$, also $f(\pm 2, y) := g_1(y) = 4 + (y-1)^2$.
Wir untersuchen g_1 (als Funktion der Veränderlichen y) auf lokale Extrema.

$$g_1'(y) = 2(y-1) = 0 \iff y = 1; \quad \text{und} \quad g_1''(y) = 2 > 0.$$

Folglich besitzt g_1 an der Stelle $y = 1$ ein lokales Minimum der Größe $g_1(1) = 4$ (dies ist nach unserer Definition kein lokales Extremum von $f(x,y)$ – vgl. 8/3/17).
Sei jetzt $y = -2$ und $-2 \le x \le 2$, also $f(x,-2) := g_2(x) = x^2 + 9$.

$$g_2'(x) = 2x = 0 \iff x = 0, \quad \text{und} \quad g_2''(x) = 2 > 0;$$

somit besitzt g_2 in $x = 0$ ein lokales Minimum der Größe $g_2(0) = 9$.
Schließlich sei $y = 2$ und $-2 \le x \le 2$, also $f(x,2) := g_3(x) = x^2 + 1$.

$$g_3'(x) = 2x = 0 \iff x = 0, \quad \text{und} \quad g_3''(x) = 2 > 0;$$

folglich besitzt g_2 in $x = 0$ ein lokales Minimum der Größe $g_3(0) = 1$.
Zur Bestimmung der globalen Extrema haben wir zum Vergleich noch die Funktionswerte von f in den 4 Eckpunkten heranzuziehen:

$$f(\pm 2, -2) = 13 \quad \text{und} \quad f(\pm 2, 2) = 5.$$

Insgesamt erhält man somit: f besitzt genau ein lokales Minimum an der Stelle $\overline{c} = (0,1)$ der Größe $f(\overline{c}) = 0$ und kein lokales Maximum. $f(\overline{c})$ ist gleichzeitig globales Minimum von f. An den Stellen $(\pm 2, -2)$ besitzt f ein globales Maximum der Größe $f(\pm 2, -2) = 13$.

(b) Sei $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ und $1 \le x \le 10,\ 1 \le y \le 10$. Es ist

$$f_x(x,y) = y - \frac{50}{x^2}, \quad f_y(x,y) = x - \frac{20}{y^2},$$
$$f_{xx}(x,y) = \frac{100}{x^3}, \quad f_{xy}(x,y) = 1 = f_{yx}(x,y) \quad \text{und} \quad f_{yy}(x,y) = \frac{40}{y^3}.$$

Aus $y - \frac{50}{x^2} = 0$ und $x - \frac{20}{y^2} = 0$ ergeben sich die kritischen Punkte. Es ist

$$y - \frac{50\cdot y^4}{400} = 0 = y\left(1 - \frac{y^3}{8}\right) \iff y = 0 \text{ oder } y = 2$$

($y = 0$ scheidet als Lösung aus, liegt nicht im Inneren des Definitionsbereiches);
also $y = 2$ und $x = 5$. Einziger kritischen Punkt ist $\overline{c} = (5, 2)$. Weiterhin ist

$$D = f_{xx}(\overline{c}) \cdot f_{yy}(\overline{c}) - f_{xy}^2(\overline{c}) = \frac{100}{5^3} \cdot \frac{40}{2^3} - 1 = 3 > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(\overline{c}) > 0.$$

Folglich besitzt f an der Stelle $\overline{c}$ ein lokales Minimum der Größe

$$f(5, 2) = 10 + \frac{50}{5} + \frac{20}{2} = 30.$$

Wir untersuchen jetzt f auf dem Rande des Definitionsbereiches.
Sei $x = 1$ und $1 \leq y \leq 10$; also $f(1, y) := g_1(y) = y + 50 + \frac{20}{y}$. Es ist

$$g_1'(y) = 1 - \frac{20}{y^2} = 0 \iff y = \pm 2\sqrt{5}.$$

($-2\sqrt{5}$ scheidet als Lösung aus, liegt nicht im Definitionsbereich)

$$g_1''(y) = \frac{40}{y^3} \implies g_1''(2\sqrt{5}) > 0.$$

g_1 besitzt an der Stelle $y = 2\sqrt{5}$ ein lokales Minimum der Größe

$$g_1(2\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} + 50 + \frac{20}{2\sqrt{5}} = 50 + 4\sqrt{5}.$$

Sei $x = 10$ und $1 \leq y \leq 10$, also $f(10, y) := g_2(y) = 10y + 5 + \frac{20}{y}$. Dann ist

$$g_2'(y) = 10 - \frac{20}{y^2} = 0 \iff y = \pm\sqrt{2}. \quad (-\sqrt{2} \text{ scheidet als Lösung aus})$$

$$g_2''(y) = \frac{40}{y^3} \implies g_2''(\sqrt{2}) > 0.$$

g_2 besitzt in $y = \sqrt{2}$ ein lokales Minimum der Größe

$$g_2(\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} + 5 + \frac{20}{\sqrt{2}} = 5 + 20\sqrt{2}.$$

Es sei jetzt $y = 1$ und $1 \leq x \leq 10$, also $f(x, 1) := g_3(x) = x + \frac{50}{x} + 20$. Es ist

$$g_3'(x) = 1 - \frac{50}{x^2} = 0 \iff x = \pm 5\sqrt{2} \quad (-5\sqrt{2} \text{ scheidet als Lösung aus})$$

$$g_3''(x) = \frac{100}{x^3} \implies g_3''(5\sqrt{2}) > 2.$$

g_3 besitzt in $x = 5\sqrt{2}$ ein lokales Minimum der Größe

$$g_3(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} + \frac{50}{5\sqrt{2}} + 20 = 20 + 10\sqrt{2}.$$

Schließlich sei $y = 10$ und $1 \leq x \leq 10$, also $f(x, 10) := g_4(x) = 10x + \frac{50}{x} + 2$. Dann ist

$$g_4'(x) = 10 - \frac{50}{x^2} = 0 \iff x = \pm\sqrt{5} \quad (-\sqrt{5} \text{ scheidet als Lösung aus})$$

$$g_4''(x) = \frac{100}{x^3} \implies g_4''(\sqrt{5}) > 0.$$

g_4 besitzt in $x = \sqrt{5}$ ein lokales Minimum der Größe

$$g_4(\sqrt{5}) = 10\sqrt{5} + \frac{50}{\sqrt{5}} + 2 = 2 + 20\sqrt{5}.$$

Wir betrachten noch f an den Eckpunkten des Definitionsbereiches.

$$f(1, 1) = 1 + 50 + 20 = 71, \quad f(1, 10) = 10 + 50 + 2 = 62,$$
$$f(10, 1) = 10 + 5 + 20 = 35, \quad f(10, 10) = 100 + 5 + 2 = 107.$$

Damit erhält man insgesamt: f besitzt genau ein lokales Minimum an der Stelle $\overline{c} = (5, 2)$ der Größe $f(5, 2) = 30$ und kein lokales Maximum. $f(\overline{c})$ ist gleichzeitig globales Minimum von f. An der Stelle $(10,10)$ besitzt f ein globales Maximum der Größe $f(10,10) = 107$.

(c) Sei $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x-y)$ und $0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.
Es ist

$$f_x(x,y) = \cos x + \cos(x-y), \qquad f_y(x,y) = \cos y - \cos(x-y),$$
$$f_{xx}(x,y) = -\sin x - \sin(x-y), \quad f_{xy}(x,y) = \sin(x-y) = f_{yx}(x,y),$$
$$f_{yy}(x,y) = -\sin y - \sin(x-y).$$

Aus $\cos x + \cos(x-y) = 0$ und $\cos y - \cos(x-y) = 0$ erhält man

$$\cos x + \cos y = 0, \quad \text{also} \quad \cos x = \cos y = 0$$

(denn für $0 \le z \le \frac{\pi}{2}$ ist stets $\cos z \ge 0$).
Folglich ist $x = y = \frac{\pi}{2}$. Der einzige kritische Punkt $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ liegt nicht im Inneren von $D(f)$. Damit besitzt f kein lokales Extremum.
Wir untersuchen f auf dem Rande von $D(f)$.
Sei $x = 0$ und $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$, also

$$f(0,y) := g_1(y) = \sin y + \sin(-y) = \sin y - \sin y = 0.$$

Sei $x = \frac{\pi}{2}$ und $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$, also

$$f(\tfrac{\pi}{2}, y) := g_2(y) = 1 + \sin y + \sin(\tfrac{\pi}{2} - y).$$

Dann ist

$$g_2'(y) = \cos y - \cos(\tfrac{\pi}{2} - y) = 0 \implies \cos y = \cos(y - \tfrac{\pi}{2}) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - y),$$

also $y = \frac{\pi}{4}$. Weiterhin ist

$$g_2''(y) = -\sin y - \sin(\tfrac{\pi}{2} - y) \implies g_2''(\tfrac{\pi}{4}) = -2\sin\tfrac{\pi}{4} < 0.$$

g_2 besitzt in $y = \frac{\pi}{4}$ ein lokales Maximum der Größe

$$g_2(\tfrac{\pi}{4}) = 1 + 2\sin\tfrac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}.$$

Sei $y = 0$ und $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, also $f(x,0) := g_3(x) = 2\sin x$. Dann gilt:

$$g_3'(x) = 2\cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} \quad (x = \tfrac{\pi}{2} \text{ liegt nicht im Inneren von } D(g_3)\,).$$

Sei nun $y = \frac{\pi}{2}$ und $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, also

$$f(x, \tfrac{\pi}{2}) := g_4(x) = \sin x + 1 + \sin(x - \tfrac{\pi}{2}).$$

$g_4'(x) = \cos x + \cos(x - \frac{\pi}{2}) = 0$ besitzt keine Lösung, folglich hat g_4 keinen kritischen Punkt.
Wir betrachten noch f in den Eckpunkten con $D(f)$.

$$f(0,0) = 0, \quad f(0,\tfrac{\pi}{2}) = \sin\tfrac{\pi}{2} + \sin(-\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad f(\tfrac{\pi}{2},0) = 2, \quad f(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}) = 2.$$

Insgesamt erhält man: f besitzt kein lokales Extremum. An den Stellen $(0,y)$ mit $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ besitzt f ein globales Minimum der Größe 0 und an der Stelle $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ ein globales Maximum der Größe $1 + \sqrt{2}$.

12.9 Integralrechnung (1 Veränderliche)

9.1 Es sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. **12/9/1/1**
Überprüfen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:

(a) Ist $f(x)$ eine periodische Funktion, so ist auch $F(x)$ periodisch.

(b) Ist $f(x)$ eine ungerade (bzw. gerade) Funktion, so ist $F(x)$ eine gerade (bzw. ungerade) Funktion.

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.1 (a) Die Aussage gilt nicht. **12/9/1/2**

(a) Die Aussage gilt.

Lösung zu Aufgabe 9.1 Im Folgenden sei F eine Stammfunktion von f in $\mathbb{R}$. **12/9/1/3**

(a) Offenbar ist $f(x) := \sin x + 1$ periodisch in $\mathbb{R}$ und
$F(x) := -\cos x + x$ ist (als eine Stammfunktion von f) nicht periodisch.

(b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und F die Stammfunktion von f mit der Eigenschaft $F(x_0) = 0$ (vgl. 9/1/4), und es gelte zunächst $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann erhält man für $g(x) = -x$ mit Hilfe der Substitutionsregel (vgl. 9/1/18 – 9/1/20):

$$\int_{x_0}^{x} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) = F(-x) \quad \text{und}$$

$$\int_{x_0}^{x} f(-x)\cdot(-x)'dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x), \quad \text{also}$$

$$F(-x) = F(x).$$

Folglich ist F gerade.

Sei jetzt $f(-x) = f(x)$. Analog wie oben erhält man:

$$\int_{x_0}^{x} f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) = F(-x) \quad \text{und}$$

$$\int_{x_0}^{x} f(-x)\cdot(-x)'dx = -\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = -F(x), \quad \text{also}$$

$$F(-x) = -F(x).$$

Folglich ist F ungerade.

9.2 Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale: **12/9/2/1**

(a) $\displaystyle\int x(x+1)(x-2)\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4+x^2} + 2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int (3x-5)^{10}\,dx$, [Hinweis: Substitutionsregel],

(d) $\displaystyle\int x \sin x\,dx$, [Hinweis: Partielle Integration].

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.2 (a) $\int x(x+1)(x-2)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + c.$ **12/9/2/2**

(b) $\int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx = \arcsin\frac{x}{2} + 2\ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{1+(\frac{x}{2})^2}\right) + c.$

(c) $\int (3x-5)^{10}\,dx = \frac{(3x-5)^{11}}{33} + c.$

(d) $\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + c.$

Lösung zu Aufgabe 9.2 **12/9/2/3**

(a) $$\int x(x+1)(x-2)\,dx = \int (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + c.$$

(b) $$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx &= \int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4+x^2}\cdot\sqrt{4-x^2}}\,dx \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int \frac{2\,dx}{\sqrt{4+x^2}} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+(\frac{x}{2})^2}} = (\star)\end{aligned}$$

Setzt man $\frac{x}{2} := t$, dann ist (vgl. 9/1/17: Grundintegrale; Achtung: beim drittletzten Integral tritt ein Vorzeichenfehler auf, unter der Wurzel muß x^2+1 stehen)

$$\begin{aligned}(\star) &= \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int \frac{2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \arcsin t + 2\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + c \\ &= \arcsin\frac{x}{2} + 2\ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{1+(\frac{x}{2})^2}\right) + c.\end{aligned}$$

(c) $$\int (3x-5)^{10}\,dx = \frac{1}{3}\int t^{10}\,dt \quad (\text{für } 3x-5=t), \\ = \frac{t^{11}}{33} + c = \frac{(3x-5)^{11}}{33} + c.$$

(d) $$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= -x\cos x - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \sin x + c.\end{aligned}$$

9.3 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x^3+x^2+2x+2}$. **12/9/3/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.3 Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung erhält man **12/9/3/2**

$$\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{6}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + c.$$

Lösung zu Aufgabe 9.3 Durch Partialbruchzerlegung entsteht **12/9/3/3**

$$\frac{1}{x^3+x^2+2x+2} = \frac{1}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2},$$

wobei eine Nullstelle von x^3+x^2+2x+2 zu erraten war. Hieraus erhält man

$$1 = (A+B)x^2 + (B+C)x + (2A+C), \text{ also}$$

$$A+B=0, \quad B+C=0, \quad 2A+C=1.$$

Als Lösung dieses linearen Gleichungssystems ergibt sich

$$A = C = \tfrac{1}{3} \quad \text{und } B = -\tfrac{1}{3}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2} &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{-x+1}{x^2+2}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{6}\int \frac{dt}{t^2+1} \quad (\text{für } t := \tfrac{x}{\sqrt{2}}) \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{6}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + c.
\end{aligned}$$

9.4 Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale $\int f(x)\,dx$: **12/9/4/1**

(a) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2+2x-8}$, (d) $f(x) = \dfrac{4x-3}{2x^2-3x}$,

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, (e) $f(x) = \dfrac{-2\cos x\sin x}{\cos^2 x}$,

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+9}$, (f) $f(x) = x\ln^2 x$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.4 (a) $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8}\,dx = \frac{17}{6}\ln|x+4| + \frac{1}{6}\ln|x-2| + c.$ **12/9/4/2**

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a}{|a|}\arcsin\frac{x}{a} + c.$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + c.$

(d) $\displaystyle\int \frac{4x-3}{2x^2-3x}\,dx = \ln|2x^2-2x| + c.$

(e) $\displaystyle\int \frac{-2\cos x\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \ln(\cos^2 x) + c.$

(f) $\displaystyle\int x\cdot\ln^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\Big) + c.$

Lösung zu Aufgabe 9.4 **12/9/4/3**

(a) Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung erhält man

$$\frac{3x-5}{x^2+2x-8} = \frac{3x-5}{(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2}, \quad \text{und somit}$$

$$3x-5 = (A+B)x + (-2A+4B), \quad \text{also}$$

$$A+B = 3 \ \text{ und } \ -2A+4B = -5.$$

Als Lösung ergibt sich

$$A = \tfrac{17}{6} \ \text{ und } \ B = \tfrac{1}{6}.$$

Folglich ist

$$\int \frac{3x-5}{x^2+2x-8}\,dx = \frac{17}{6}\int \frac{dx}{x+4} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2}$$
$$= \frac{17}{6}\ln|x+4| + \frac{1}{6}\ln|x-2| + c.$$

(b) Für $a \neq 0$ und $x := at$ ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{|a|}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \frac{a}{|a|}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= \frac{a}{|a|}\arcsin\frac{x}{a} + c.$$

(c) $$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(\frac{x}{3})^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} \quad (\text{für } \ t := \tfrac{x}{3})$$
$$= \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + c.$$

(d) Wegen $(2x^2-3x)' = 4x-3$ ist

$$\int \frac{4x-3}{2x^2-3x}\,dx = \ln|2x^2-2x| + c.$$

Natürlich hätte man das Ergebnis – wenn auch umständlicher – mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung erhalten können.

(e) Wegen $(\cos^2 x)' = -2\cos x \sin x$ ist

$$\int \frac{-2\cos x\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \ln(\cos^2 x) + c \quad \text{oder}$$

$$\int \frac{-2\cos x\sin x}{\cos^2 x}\,dx = 2\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = 2\ln|\cos x| + c = \ln(\cos^2 x) + c.$$

(f) Mit Hilfe der partiellen Integration erhält man:

$$\int x\cdot\ln^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \int x\cdot\ln x\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx\right)$$
$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + c.$$

9.5 Beweisen Sie: Ist die Funktion f in dem Intervall $[a,b]$ stetig und nicht negativ **12/9/5/1**

und ist $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

[Hinweis: Man führe den Beweis indirekt.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.5 Man schätze das Integral (nach unten) durch eine positive Untersumme ab. 12/9/5/2

Lösung zu Aufgabe 9.5 Angenommen, unter den gegebenen Voraussetzungen ist $f(c) \neq 0$ für ein $c \in [a,b]$, also $f(c) > 0$ und somit auch $\frac{f(c)}{2} > 0$. 12/9/5/3

Offenbar ist $g(x) := f(x) - \frac{f(c)}{2}$ in $[a,b]$ stetig und $g(c) > 0$. Folglich existiert eine Umgebung $U(c)$, so daß $g(x) > 0$ für alle $x \in U(c)$ (vgl. 6/3/44, Eigenschaft (2)) und daher $f(x) > \frac{f(c)}{2}$ für alle $x \in U(c)$.

Seien $a', b' \in [a,b]$ mit $a < a' < c < b' < b$. Dann ist $\mathfrak{z} = (a, a', b', b)$ eine Zerlegung von $[a,b]$, und für die entsprechende Untersumme von f gilt:

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) = (a'-a)\cdot \underbrace{\inf_{x\in[a,a']} f(x)}_{\geq 0} + (b'-a')\cdot \underbrace{\inf_{x\in[a',b']} f(x)}_{>0} + (b-b')\cdot \underbrace{\inf_{x\in[b',b]} f(x)}_{\geq 0} > 0.$$

Wegen $\int_a^b f(x)\,dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq \underline{S}_f(\mathfrak{z}) > 0$ kann das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ nicht null sein. Dies widerspricht der Voraussetzung. Also $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

9.6 Es sei f in dem Intervall $[a,b]$ integrierbar und $f(x) \leq c$ für alle $x \in [a,b]$. 12/9/6/1

Man beweise $\int_a^b f(x)\,dx \leq c\cdot(b-a)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.6 Die Lösung ist fast trivial. 12/9/6/2

Lösung zu Aufgabe 9.6 Wegen $f(x) \leq c$ in $[a,b]$ ist nach 9/5/0 stets $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$. 12/9/6/3

9.7 Es seien f, g in dem Intervall $[a,b]$ stetig und es sei $f(x) \leq g(x)$ für jedes $x \in [a,b]$. 12/9/7/1

Gibt es ein $c \in [a,b]$, so daß $f(c) < g(c)$, dann ist $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.7 Man benutze die Ergebnisse von Aufgabe 9.5. 12/9/7/2

Lösung zu Aufgabe 9.7 Nach Voraussetzung ist $h(x) := g(x) - f(x) \geq 0$ für jedes $x \in [a,b]$ und $h(c) > 0$. Analog wie im Beweis von Aufgabe 9.5 ist dann $\int_a^b h(x)\,dx > 0$ und somit 12/9/7/3

$$0 < \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{also}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx.$$

9.8 Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale: **12/9/8/1**

(a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x\,dx,$ (c) $\displaystyle\int_0^2 x^3\mathrm{e}^x\,dx,$ (d) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx.$

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.8 (a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}).$ **12/9/8/2**

(b) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} - \mathrm{e}.$

(c) $\displaystyle\int_0^2 x^3\mathrm{e}^x\,dx = 2\mathrm{e}^2 + 6.$

(d) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx = \ln 4 - 1.$

Lösung zu Aufgabe 9.8 Wir bestimmen zunächst jeweils eine Stammfunktion des entsprechenden Integranden. **12/9/8/3**

(a) Für $t := \sqrt{x}$ ist

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \mathrm{e}^t\,dt = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + c, \quad \text{also}$$

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\left(\mathrm{e}^{\sqrt{4}} - \mathrm{e}^{\sqrt{1}}\right) = 2(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}).$$

(b) Für $t := \mathrm{e}^x$ ist

$$\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x\,dx = \int \mathrm{e}^t\,dt = \mathrm{e}^t + c = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + c, \quad \text{also}$$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^1} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}^0} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} - \mathrm{e}.$$

(c) Durch mehrfaches partielles Integrieren erhält man

$$\int x^3\mathrm{e}^x\,dx = x^3\mathrm{e}^x - 3\int x^2\mathrm{e}^x\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= x^3 e^x - 3\Big(x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx\Big) \\
&= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\Big(x e^x - \int e^x\,dx\Big) \\
&= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c, \quad \text{also}
\end{aligned}
$$

$$\int_0^2 x^3 e^x\,dx = 2e^2 + 6.$$

(d) Für $t := \ln x$ erhält man mit Hilfe der partiellen Integration

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx &= \int \ln t\,dt = \int 1\cdot\ln t\,dt \\
&= t\cdot\ln t - \int dt = t(\ln t - 1) + c \\
&= \ln x\Big(\ln(\ln x) - 1\Big) + c, \quad \text{also}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx &= \ln e^2\Big(\ln(\ln e^2) - 1\Big) - \ln e\Big(\ln(\ln e) - 1\Big) \\
&= 2(\ln 2 - 1) - 1(0 - 1) = \ln 4 - 1.
\end{aligned}
$$

9.9 Berechnen Sie den Inhalt der Punktmenge **12/9/9/1**

$$M = \{(x,y) : -1 \le x \le 1 \ \text{ und } \ f(x) \le y \le g(x)\},$$

wobei $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2 - x^2$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.9 Der Inhalt der Punktmenge beträgt $\frac{8}{3}$. **12/9/9/2**

Lösung zu Aufgabe 9.9 Für $-1 \le x \le 1$ ist stets $f(x) \le 1$ und $g(x) \ge 1$. Folglich ist der Inhalt A dieser Punktmenge gegeben durch **12/9/9/3**

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} \Big(g(x) - f(x)\Big)\,dx = \int_{-1}^{1} (2 - 2x^2)\,dx \\
&= \Big[2x - \tfrac{2}{3}x^3\Big]_{-1}^{1} = 2 - \tfrac{2}{3} - (-2 + \tfrac{2}{3}) = \tfrac{8}{3}.
\end{aligned}
$$

9.10 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von oben bzw. von unten durch $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $r > 0$ bzw. durch $y = \frac{\sqrt{2}}{r} \cdot x^2$ begrenzt wird. **12/9/10/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.10 Der Flächeninhalt beträgt $r^2(\frac{1}{6} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}})$. **12/9/10/2**

Lösung zu Aufgabe 9.10 Wir berechnen zunächst die Schnittpunkte beider Kurven. **12/9/10/3** Aus $\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{\sqrt{2}}{r}x^2$ erhält man $x^4 + \frac{r^2}{2}x^2 - \frac{r^4}{2} = 0$ und somit $x_{1,2}^2 = -\frac{r^2}{4} \pm \frac{3}{4}r^2$.

$-r^2$ scheidet als Lösung aus, da ein Quadrat (in $\mathbb{R}$) nicht negativ sei kann. Es bleibt $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot r$. Als Schnittpunkte ergeben sich also $a := -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot r$ und $b := \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot r$.

Der Flächeninhalt A ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_a^b \Big(\sqrt{r^2-x^2} - \tfrac{\sqrt{2}}{r}x^2\Big)\,dx \\ &= \int\limits_a^b \sqrt{r^2-x^2}\,dx - \Big[\tfrac{\sqrt{2}}{3r}x^3\Big]_a^b \\ &= \int\limits_a^b \sqrt{r^2-x^2}\,dx - \tfrac{r^2}{3}. \end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst das unbestimmte Integral $\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx$.

Für $t := \frac{x}{r}$ ist

$$\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx = r\int \sqrt{1-(\tfrac{x}{r})^2}\,dx = r^2\int \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Für $t := \sin z$, also $z = \arcsin t = \arcsin\frac{x}{r}$ ist

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \int \sqrt{1-\sin^2 z}\cdot\cos z\,dz = \int \cos^2 z\,dz.$$

Durch partielles Integrieren erhält man

$$\begin{aligned} \int \cos^2 z\,dz &= \sin z\cos z + \int \sin^2 z\,dz \\ &= \sin z\cos z + \int (1-\cos^2 z)\,dz \\ &= \sin z\cos z + z - \int \cos^2 z\,dz \end{aligned}$$

und somit

$$\int \cos^2 z\,dz = \tfrac{1}{2}\sin z\cos z + \tfrac{z}{2} + c.$$

Also

$$\begin{aligned} \int \sqrt{r^2-x^2}\,dx &= r^2\int \cos^2 z\,dz \\ &= r^2\Big(\tfrac{1}{2}\sin z\cdot\sqrt{1-\sin^2 z} + \tfrac{z}{2}\Big) + c \\ &= r^2\Big(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{x}{r}\cdot\sqrt{1-(\tfrac{x}{r})^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin\tfrac{x}{r}\Big) + c \\ &= \tfrac{x}{2}\cdot\sqrt{r^2-x^2} + \tfrac{r^2}{2}\arcsin\tfrac{x}{r} + c, \end{aligned}$$

und wegen $a = -b$ ist

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b \sqrt{r^2-x^2}\,dx &= \tfrac{b}{2}\cdot\sqrt{r^2-b^2} + \tfrac{r^2}{2}\arcsin\tfrac{b}{r} + \tfrac{b}{2}\cdot\sqrt{r^2-b^2} - \tfrac{r^2}{2}\arcsin(-\tfrac{b}{r}) \\ &= b\cdot\sqrt{r^2-b^2} + r^2\arcsin\tfrac{b}{r} \end{aligned}$$

$$= r^2\Big(\tfrac{1}{2} + \arcsin\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Damit ist

$$A = r^2\Big(\tfrac{1}{2} + \arcsin\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{3}\Big) = r^2\Big(\tfrac{1}{6} + \arcsin\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

9.11 Es sei $f(x) = \begin{cases} 5\sin x + 3x & \text{für } x \le 1, \\ x^{-1} + 3x^2 & \text{für } x > 1. \end{cases}$ Man berechne $\int\limits_{-2}^{5} f(x)\,dx.$ **12/9/11/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.11 $\int\limits_{-2}^{5} f(x)\,dx = 118 + \frac{3}{2} + 5(\cos 2 - \cos 1) + \ln 5 \approx 116,327.$ **12/9/11/2**

Lösung zu Aufgabe 9.11 Aus dem Beweis von Satz 9.11 (vgl. 9/4/3) ergibt sich unmittelbar, daß eine integrierbare Funktion nach (endlicher) Abänderung an einer Stelle integrierbar bleibt und daß sich der Wert des Integrals nicht ändert. Folglich gilt: **12/9/11/3**

$$\begin{aligned} \int\limits_{-2}^{5} f(x)\,dx &= \int\limits_{-2}^{1} (5\sin x + 3x)\,dx + \int\limits_{1}^{5} (\tfrac{1}{x} + 3x^2)\,dx \\ &= \Big[-5\cos x + \tfrac{3}{2}x^2\Big]_{-2}^{1} + \Big[\ln x + x^3\Big]_{1}^{5} \\ &= -5\cos 1 + \tfrac{3}{2} + 5\cos 2 - 6 + \ln 5 + 125 - 1 \\ &= 118 + \tfrac{3}{2} + 5(\cos 2 - \cos 1) + \ln 5 \approx 116,327. \end{aligned}$$

9.12 Es sei $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos x$. Man berechne einen Näherungswert für das Integral von f über dem Intervall $[0, \frac{2}{3}]$, indem man f zunächst durch ein Polynom dritten Grades approximiert. **12/9/12/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.12 Als Taylorpolynom 3. Grades erhält man $p_3(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3$ und somit **12/9/12/2**

$$\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}} p_3(x)\,dx = \tfrac{112}{243}.$$

Lösung zu Aufgabe 9.12 Wir benutzen die Taylorsche Formel (vgl. 7/2/9) an der Stelle $a = 0$, um ein Approximationspolynom zu bestimmen. **12/9/12/3**

Es ist $f(0) = 1$, weiterhin ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\cos x - \mathrm{e}^{-x}\sin x = -\mathrm{e}^{-x}(\cos x + \sin x) \implies f'(0) = -1, \\ f''(x) &= \mathrm{e}^{-x}(\cos x + \sin x) - \mathrm{e}^{-x}(-\sin x + \cos x) = 2\mathrm{e}^{-x}\sin x \implies f''(0) = 0, \\ f'''(x) &= -2\mathrm{e}^{-x}\sin x + 2\mathrm{e}^{-x}\cos x = 2\mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) \implies f'''(0) = 2. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6}\cdot x^3 = 1 - x + \tfrac{1}{3}x^3 := p_3(3).$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, folglich ist p_3 tatsächlich eine Approximation von f.

Damit ist

$$\int_0^{\frac{2}{3}} \left(1 - x + \tfrac{1}{3}x^3\right) dx = \left[x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{1}{12}x^4\right]_0^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2^4}{12\cdot 3^4} = \frac{112}{243}$$

ein Näherungswert von $\int\limits_0^{\frac{2}{3}} f(x)\,dx$.

9.13 Es sei $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-1,0], \\ 1 & \text{für } x \in (0,1]. \end{cases}$ **12/9/13/1**

Zeigen Sie, daß f in $[-1,1]$ bestimmt integrierbar ist dort aber keine Stammfunktion besitzt.

[Hinweis: Beweis indirekt; eine Stammfunktion müßte insbesondere an der Stelle 0 differenzierbar sein.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.13 Für die Zerlegung $\mathfrak{z} = (-1, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1)$ von $[-1,1]$ **12/9/13/2**
ist $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \frac{4}{n}$. Hieraus folgt die bestimmte Integrierbarkeit von f.

Eine Stammfunktion von f müßte an der Stelle 0 differenzierbar sein. Dies führt aber zum Widerspruch.

Lösung zu Aufgabe 9.13 Wir zeigen die bestimmte Integrierbarkeit von f mit Hilfe **12/9/13/3**
des Riemannschen Integrierbarkeitskriteriums (vgl. 9/3/1).

Es sei $\mathfrak{z} = (-1, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1) = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ eine Zerlegung von $[-1,1]$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $I_i := [a_i, a_{i+1}]$. Weiterhin sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für die Differenz von Ober- und Untersumme von f bei der Zerlegung $\mathfrak{z}$:

$$\begin{aligned} \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^{2}(a_{i+1} - a_i)\cdot\Big(\sup_{x\in I_i} f(x) - \inf_{x\in I_i} f(x)\Big) \\ &= (a_2 - a_1)\cdot\Big(\sup_{x\in I_2} f(x) - \inf_{x\in I_2} f(x)\Big) \\ &= \frac{4}{n} < \varepsilon, \quad \text{für hinreichend große } n. \end{aligned}$$

Folglich ist f in $[-1,1]$ bestimmt integrierbar.

Angenommen, f besitzt in $[-1,1]$ eine Stammfunktion F, dann ist F insbesondere an der Stelle $c = 0$ differenzierbar. Folglich existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten von F an der Stelle 0, insbesondere existiert der rechtsseitige Grenzwert (vgl. 6/3/52).

Für $x > 0$ ist $\dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \dfrac{1 - (-1)}{x} = \dfrac{2}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \infty.$

Dies widerspricht der Annahme. Damit besitzt F in $[-1, 1]$ keine Stammfunktion.

9.14 Es sei $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos \frac{\pi}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$ **12/9/14/1**

Zeigen Sie, daß f in $I = [-1, 1]$ differenzierbar ist (also f' in I eine Stammfunktion besitzt), aber f' in I nicht bestimmt integrierbar ist.

[Hinweis: f' ist in I nicht beschränkt.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.14 Der Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle 0 existiert. Damit ist f in 0 differenzierbar. **12/9/14/2**

Da f' in $[-1, 1]$ nicht beschränkt ist, ist f' dort auch nicht im Riemannschen Sinne integrierbar.

Lösung zu Aufgabe 9.14 Für $x \neq 0$ ist f in $[-1, 1]$ differenzierbar, denn f ist eine „rationale Zusammensetzung“ differenzierbarer Funktionen, und es gilt: **12/9/14/3**

$$f'(x) = 2x \cdot \cos \tfrac{\pi}{x^2} + \tfrac{2\pi}{x} \cdot \sin \tfrac{\pi}{x^2}.$$

An der Stelle 0 berechnen wir den Limes des Differenzenquotienten von f:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cdot \cos \frac{\pi}{x^2} - 0}{x} = x \cdot \cos \frac{\pi}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0,$$

denn $\cos \frac{\pi}{x^2}$ ist beschränkt für $x \neq 0$. Damit ist f in $[-1, 1]$ differenzierbar, und f ist eine Stammfunktion von f' mit

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \cos \frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x} \cdot \sin \frac{\pi}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Eine Voraussetzung für die bestimmte Integrierbarkeit einer Funktion ist ihre Beschränktheit in dem betrachteten Intervall. Wir zeigen, daß f in $[-1, 1]$ nicht beschränkt ist.

Offenbar gilt: $2x \cdot \cos \frac{\pi}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$

Für $x_n := \sqrt{\frac{2\pi}{\pi + 4n}}$ ist (x_n) eine Nullfolge und $\sin \frac{\pi}{x_n^2} = 1$ für alle n. Folglich gilt:

$$\frac{2\pi}{x_n} \cdot \sin \frac{\pi}{x_n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty, \quad \text{also} \quad f'(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty.$$

Damit ist f' in $[-1, 1]$ nicht beschränkt und demzufolge nicht bestimmt integrierbar.

9.15 Berechnen Sie das Volumen eines Torus. (Drehung einer Kreisscheibe um die x-Achse mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $(0, R)$.) **12/9/15/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.15 Für $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ und $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ beträgt das Volumen des Torus: **12/9/15/2**

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} \Big(f^2(x) - g^2(x) \Big)\, dx = 2r^2 R \pi^2.$$

Lösung zu Aufgabe 9.15 Wir betrachten die Gleichung $(y-R)^2+x^2=r^2$ eines Kreises mit dem Mittelpunkt $(0,R)$ und dem Radius r. Die Auflösung der Gleichung nach y ergibt: **12/9/15/3**

$$y=f(x):=R+\sqrt{r^2-x^2} \quad \text{bzw.} \quad y=g(x):=R-\sqrt{r^2-x^2}.$$

Der entsprechende Rotationskörper ist gegeben durch

$$V=\pi\int\limits_{-r}^{r}\Big(f^2(x)-g^2(x)\Big)\,dx=4\pi R\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

Nach Aufgabe 9.10 ist

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\tfrac{x}{2}\cdot\sqrt{r^2-x^2}+\tfrac{r^2}{2}\arcsin\tfrac{x}{r}+c, \text{ also}$$

$$\begin{aligned}V&=4\pi R\cdot\Big[\tfrac{x}{2}\cdot\sqrt{r^2-x^2}+\tfrac{r^2}{2}\arcsin\tfrac{x}{r}\Big]_{-r}^{r}\\&=4\pi R\Big(0+\tfrac{r^2}{2}\arcsin 1-(0+\tfrac{r^2}{2}\arcsin(-1)\,)\Big)\\&=4\pi Rr^2\arcsin 1=2r^2R\pi^2.\end{aligned}$$

9.16 Es sei $I_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx.$ **12/9/16/1**

Ermitteln Sie eine Rekursionsformel für I_n und berechnen Sie I_n.

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.16 Es ist $I_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ **12/9/16/2**

Für $n=2m$ bzw. $n=2m+1$ ist

$$I_n=\frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{2m(2m-2)\cdots 2}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad I_n=\frac{2m(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3}.$$

Lösung zu Aufgabe 9.16 Für $n\geq 2$ erhält man durch partielle Integration **12/9/16/3**

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx&=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot\sin x\,dx\\&=\Big[\sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos x\cdot(-\cos x)\,dx\\&=0+(n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot(1-\sin^2 x)\,dx\\&=(n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx.\end{aligned}$$

Also

$$n\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx$$

und somit

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx = \frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}.$$

Hieraus erhält man (induktiv) für $n = 2m$:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\,dx &= \frac{2m-1}{2m}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-2} x\,dx \\ &= \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{2m(2m-2)\cdots 2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot dx \\ &= \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{2m(2m-2)\cdots 2}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

und für $n = 2m+1$:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\,dx &= \frac{2m}{2m+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x\,dx \\ &= \frac{2m(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \\ &= \frac{2m(2m-2)\cdots 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 3}\,.\end{aligned}$$

9.17 Beweisen Sie, daß für $0 < a,\ b$ gilt: **12/9/17/1**

$$\int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2-2bx}} = \begin{cases} 2 & \text{für } b \le a, \\ \frac{2a}{b} & \text{für } a < b. \end{cases}$$

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.17 Es ist $\int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2-2bx}} = -\frac{1}{b}\Big(\sqrt{a^2+b^2-2ab} - \sqrt{a^2+b^2+2ab}\Big).$ **12/9/17/2**

Hieraus folgt die Behauptung.

Lösung zu Aufgabe 9.17 Für $0 < a,\ b$ und $t := a^2+b^2-2bx$ gilt: **12/9/17/3**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2-2bx}} = -\frac{1}{2b}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{b}\cdot\sqrt{t} + c = -\frac{1}{b}\cdot\sqrt{a^2+b^2-2bx} + c.$$

Folglich ist

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2-2bx}} = -\tfrac{1}{b}\Big(\sqrt{a^2+b^2-2ab} - \sqrt{a^2+b^2+2ab}\Big)$$

$$= \begin{cases} -\tfrac{1}{b}\Big((a-b)-(a+b)\Big) & \text{für } b \le a, \\ -\tfrac{1}{b}\Big(-(a-b)-(a+b)\Big) & \text{für } a < b \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 & \text{für } b \le a, \\ \frac{2a}{b} & \text{für } a < b\,. \end{cases}$$

9.18 Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz: **12/9/18/1**

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, (b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$, (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \tan x\, dx$, (d) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$,

(e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$, (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x+1}$, (g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin 3x\, dx$, (h) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\, dx$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.18 (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$ **12/9/18/2**

(b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\substack{x\to b\\ b<3}} \int_0^b \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{9\pi}{4}.$

(c) Das uneigentliche Integral konvergiert nicht.

(d) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}.$

(e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$

(f) Das uneigentliche Integral konvergiert nicht.

(g) Das uneigentliche Integral konvergiert nicht.

(h) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\cdot\mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x\cdot\mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}.$

Lösung zu Aufgabe 9.18 **12/9/18/3**

(a) Für $x > 0$ ist $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\cdot\sqrt{x} + c$ und somit

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} (2 - 2\cdot\sqrt{a}) = 2.$$

(b) Für $|x| < 3$ und $x := 3\sin t$, also $t = \arcsin \frac{x}{3}$ gilt:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = 9\int \sin^2 t\,dt.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\int \sin^2 t\,dt &= -\sin t\cos t - \int \cos t(-\cos t)\,dt \\ &= -\sin t\cos t + \int dt - \int \sin^2 t\,dt \implies\end{aligned}$$

$$\int \sin^2 t\,dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin t\cos t + c.$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \frac{9}{2}(t - \sin t\cos t) + c \\ &= \frac{9}{2}(t - \sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}\,) + c \\ &= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\cdot\sqrt{9-x^2} + c.\end{aligned}$$

Für $0 < b < 3$ ist dann

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \lim_{\substack{x\to b\\ b<3}} \int_0^b \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}} \\ &= \lim_{\substack{x\to b\\ b<3}} \Big(\frac{9}{2}\arcsin\frac{b}{3} - \frac{b}{2}\cdot\sqrt{9-b^2} - \frac{9}{2}\arcsin 0 - 0\Big) \\ &= \frac{9}{2}\arcsin 1 - \frac{3}{2}\cdot\sqrt{9-9} - 0 = \frac{9\pi}{4}.\end{aligned}$$

(c) Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ bzw. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ gilt:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c.$$

Folglich ist für $0 < a < \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^a \tan x\,dx = -\ln|\cos a| + \ln|\cos 0| = -\ln|\cos a| \xrightarrow[a\to\frac{\pi}{2}]{} \infty.$$

Analog erhält man für $\frac{\pi}{2} < b < \pi$:

$$\int_b^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx = -\ln|\cos\tfrac{\pi}{2}| + \ln|\cos b| \xrightarrow[b\to\frac{\pi}{2}]{} -\infty.$$

(d) Für $x \geq 2$ und $b \geq 2$ ist

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c, \quad \text{also}$$

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\Big(-\frac{1}{b} + \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}.$$

(e) Für $a \geq 0$ ist

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} (\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}.$$

(f) Für $x \neq 1$ ist

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + c.$$

Folglich gilt für $-\infty < c < b < -1 < a < 0$:

$$\int_a^0 \frac{dx}{x+1} = \ln 1 - \ln(a+1) = -\ln(a+1) \xrightarrow[a\to -1]{} \infty.$$

Analog gilt auch

$$\int_c^b \frac{dx}{x+1} = \ln|b+1| - \ln|c+1| = \ln\left|\frac{b+1}{c+1}\right| \xrightarrow[\substack{b\to -1 \\ c\to -\infty}]{} -\infty.$$

Das uneigentliche Integral konvergiert nicht.

(g) Sei $0 < b$. Dann ist

$$\int_0^b \sin 3x\, dx = \Big[-\tfrac{1}{3}\cos 3x\Big]_0^b$$

$$= -\tfrac{1}{3}\cos 3b + \tfrac{1}{3}.$$

Für $b \to \infty$ existiert der Grenzwert nicht, folglich ist das uneigentliche Integral nicht konvergent.

(h) Für $g(x) := -x^2$ und $f(z) := \mathrm{e}^z$ ist $F(z) = \mathrm{e}^z$ eine Stammfunktion von f und es gilt (vgl. 9/1/20):

$$\int x\cdot \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = -\tfrac{1}{2}\int (-2x)\mathrm{e}^{-x^2}\, dx = -\tfrac{1}{2}\int g'(x) f(g(x))\, dx = -\tfrac{1}{2}F(g(x)) + c.$$

$$= -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + c.$$

Folglich ist für $0 < b$:

$$\int_0^\infty x\cdot \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x\cdot \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty}\Big(-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-b^2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^0\Big) = \tfrac{1}{2}.$$

9.19 (a) Berechnen Sie die Bogenlänge der durch $f(x) = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$ im Intervall $[0,2]$ definierten Kurve. **12/9/19/1**

(b) Bestimmen Sie die Länge der Schraubenlinie mit dem Radius r und der Ganghöhe $c \cdot 2\pi$ für einen Gewindegang.

(c) Es sei $\bar{f}(t) = (a\cos^3 t,\, a\sin^3 t)$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (Parameterdarstellung der Astroide).
Bestimmen Sie die Länge des gegebenen Kurvenstücks.

Lösungshinweis zu Aufgabe 9.19 (a) Die Länge der Kurve beträgt $\int\limits_0^2 \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = \frac{22}{3}$. **12/9/19/2**

(b) Die Länge der Schraubenlinie beträgt $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2+c^2}\,dt = \sqrt{r^2+c^2}\cdot 2\pi.$

(c) Die Länge der Astroide beträgt $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 3a\cdot\cos t\cdot\sin t\,dt = \frac{3a}{2}.$

Lösung zu Aufgabe 9.19 **12/9/19/3**

(a) Offenbar ist f in $[0,2]$ stetig differenzierbar. Folglich ist die Länge der von f dargestellten Kurve $\mathfrak{k}$ gegeben durch

$$l(\mathfrak{k}) = \int\limits_0^2 \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \quad \text{(vgl. 9/8/12)}$$

Es ist $f'(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x$, also

$$\sqrt{1+f'^2(x)} = \sqrt{1+4x^2(x^2+1)} = 2\cdot\sqrt{(x^2+\tfrac{1}{2})^2} = 2x^2+1.$$

Damit ist

$$l(\mathfrak{k}) = \int\limits_0^2 (2x^2+1)\,dx = \Big[\tfrac{2}{3}x^3+x\Big]_0^2 = \tfrac{2}{3}\cdot 8+2 = \tfrac{22}{3}.$$

(b) Die Schraubenlinie ist gegeben durch $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ mit $\bar f(t) = (r\cos t,\ r\sin t,\ c\cdot t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$.
Offenbar ist $\bar f$ stetig differenzierbar in $[0,2\pi]$, folglich ist

$$\begin{aligned} l(\mathfrak{k}) &= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\textstyle\sum_{i=0}^3 \left(f_i'(t)\right)^2}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + c^2}\,dt \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2+c^2}\,dt = \sqrt{r^2+c^2}\cdot 2\pi. \end{aligned}$$

(c) $\bar f(t) = (a\cos^3 t,\ a\sin^3 t) = (f_1(t), f_2(t))$ ist in $[0,\frac{\pi}{2}]$ stetig differenzierbar, also

$$l(\mathfrak{k}) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{f_1'^2(t)+f_2'^2(t)}\,dt.$$

Es ist

$$\begin{aligned} f_1'^2(t)+f_2'^2(t) &= \Big(3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)\Big)^2 + \Big(3a\sin^2 t\cos t\Big)^2 \\ &= 9a^2\cos^2 t\sin^2 t\cdot(\cos^2 t+\sin^2 t) \\ &= 9a^2\cos^2 t\sin^2 t. \end{aligned}$$

Folglich ist $\sqrt{f_1'^2(t)+f_2'^2} = 3a\cos t\sin t$ und somit

$$l(\mathfrak{k}) = 3a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \, dt = 3a \Big[\tfrac{1}{2} \sin^2 t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}.$$

12.10 Integralrechnung (n Veränderliche)

10.1 Beweisen Sie den Satz 10.1: **12/10/1/1**

Es sei D ein Rechteckbereich, f in D definiert und beschränkt und $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}', \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ seien beliebige Zerlegungen von D. Dann gilt:

(1) $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \le \overline{S}_f(\mathfrak{z})$.

(2) $D \cdot \inf\limits_{\overline{x} \in D} f(\overline{x}) \le \underline{S}_f(\mathfrak{z})$ und $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) \le D \cdot \sup\limits_{\overline{x} \in D} f(\overline{x})$.

(3) Ist $\mathfrak{z}'$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{z}$, dann gilt: $\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \le \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \le \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \le \overline{S}_f(\mathfrak{z})$.

(4) Es ist stets $\underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) \le \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2)$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 10.1 Man bilde „Rechteckzerlegungen" von D und führe den Beweis analog wie für Funktionen mit einer Veränderlichen (9/2/7). **12/10/1/2**

Lösung zu Aufgabe 10.1 Sei $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1} = b$, $c = c_0 < c_1 < \cdots < c_{m+1} = d$, $D = [a, b] \times [c, d]$, **12/10/1/3**
$D_{ij} = [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}]$ und $\mathfrak{z} = \{D_{ij} : 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le m\}$ eine Zerlegung von D.

(1) Wegen $a_i < a_{i+1}$, $c_j < c_{j+1}$ und $\inf\limits_{\overline{x} \in D_{ij}} f(\overline{x}) \le \sup\limits_{\overline{x} \in D_{ij}} f(\overline{x})$ gilt stets:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (a_{i+1} - a_i)(c_{j+1} - c_j) \cdot \inf_{\overline{x} \in D_{ij}} f(\overline{x}) \\
&\le \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (a_{i+1} - a_i)(a_{j+1} - a_j) \cdot \sup_{\overline{x} \in D_{ij}} f(\overline{x}) \\
&= \overline{S}_f(\mathfrak{z}).
\end{aligned}$$

(2) Für $i = 0, \ldots, n$ und $j = 0, \ldots, m$ ist offenbar $D_{ij} \subseteq D$ und damit auch

$$\inf_{\overline{x} \in D} f(\overline{x}) \le \inf_{\overline{x} \in D_{ij}} f(\overline{x}) \quad \text{und} \quad \sup_{\overline{x} \in D} f(\overline{x}) \ge \sup_{\overline{x} \in D_{ij}} f(\overline{x}).$$

Folglich ist (entsprechend der Bemerkung in 1/1/0):

$$
\begin{aligned}
D\cdot \inf_{\overline{x}\in D} f(\overline{x}) &= (b-a)\cdot(d-c)\cdot \inf_{\overline{x}\in D} f(\overline{x}) \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-a_j)\Big)\cdot \inf_{\overline{x}\in D} f(\overline{x}) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)\cdot \inf_{\overline{x}\in D_{ij}} f(\overline{x}) \\
&= \underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}) \qquad\qquad (\text{nach } (1)) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)\cdot \sup_{\overline{x}\in D_{ij}} f(\overline{x}) \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)\Big)\cdot \sup_{\overline{x}\in D} f(\overline{x}) \\
&= (b-a)(d-c)\cdot \sup_{\overline{x}\in D} f(\overline{x}) \\
&= D\cdot \sup_{\overline{x}\in D} f(\overline{x}).
\end{aligned}
$$

(3) Seien $(a_0^i,\ldots,a_{n_i+1}^i)$, $(c_0^j,\ldots,c_{m_j+1}^j)$ die entsprechenden Zerlegungen von $[a_i,a_{i+1}]$, $[c_j,c_{j+1}]$, die durch die Verfeinerung $\mathfrak{z}'$ von $\mathfrak{z}$ erzeugt wird, und es sei $D_{ij}^{kl}=[a_i^k,a_{i+1}^k]\times[c_j^l,c_{j+1}^l]$.
Analog wie im Beweis von (2) erhält man

$$(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)\cdot \inf_{\overline{x}\in D_{ij}} f(\overline{x}) \leq \sum_{k=0}^{n_i}\sum_{l=0}^{m_j} D_{ij}^{kl}\cdot \inf_{\overline{x}\in D_{ij}^{kl}} f(\overline{x}) \qquad (\star)$$

und

$$(a_{i+1}-a_i)(c_{j+1}-c_j)\cdot \sup_{\overline{x}\in D_{ij}} f(\overline{x}) \geq \sum_{k=0}^{n_i}\sum_{l=0}^{m_j} D_{ij}^{kl}\cdot \sup_{\overline{x}\in D_{ij}^{kl}} f(\overline{x}). \qquad (\star\star)$$

Addiert man die Ungleichungen $(\star)$ und $(\star\star)$ bezüglich i,j, dann entsteht die gewünschte Behauptung.

(4) Es sei $\mathfrak{z}'$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$, d.h., alle Teilrechtecke von $\mathfrak{z}_1$ und von $\mathfrak{z}_2$ sind auch Teilrechtecke von von $\mathfrak{z}'$. Dann gilt aufgrund der vorhergehenden Beweisschritte offenbar

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) \leq \underline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}') \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2).$$

10.2 Beweisen Sie das Riemannsche Integrierbarkeitskriterium (für Doppel- und Dreifachintegrale): **12/10/2/1**

Sei D ein Rechteckbereich bzw. ein Quader und f in D definiert und beschränkt.
Dann gilt: f ist in D integrierbar $\iff$
für jedes $\varepsilon>0$ gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ von D, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z})-\underline{S}_f(\mathfrak{z})<\varepsilon$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 10.2 Man bilde Zerlegungen von D in Teilrechtecke bzw. Teilquader und führe den Beweis analog wie bei Aufgabe 10.1 **12/10/2/2**

Lösung zu Aufgabe 10.2 Wir zeigen die Behauptung für Doppelintegrale; für Drei- **12/10/2/3**

fachintegrale erfolgt der Beweis völlig analog; man benutzt jedoch den entsprechenden Satz 10.6 (10/2/3), der analog wie Satz 10.1 leicht zu beweisen ist.

($\longrightarrow$) Sei f in D integrierbar, also $\overline{\iint_D} f(\overline{x})\,d\bar{x} = \underline{\iint_D} f(\overline{x})\,d\bar{x}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Unterintegrals (als obere Grenze der Menge aller Untersummen) existiert offenbar eine Zerlegung $\mathfrak{z}_1$ von D, so daß

$$0 \le \underline{\iint_D} f(\overline{x})\,d\bar{x} - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analog gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{z}_2$ von D, so daß

$$0 \le \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2) - \underline{\iint_D} f(\overline{x})\,d\bar{x} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für die gemeinsame Verfeinerung $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ gilt dann (nach Aufgabe 10.1) erst recht

$$0 \le \underline{\iint_D} f(\overline{x})\,d\bar{x} - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad 0 \le \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{\iint_D} f(\overline{x})\,d\bar{x} < \frac{\varepsilon}{2}$$

und somit

$$0 \le \underline{\iint_D} f(\overline{x})\,d\bar{x} - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) + \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{\iint_D} f(\overline{x})\,d\bar{x} < \varepsilon.$$

Folglich ist

$$0 \le \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon.$$

($\longleftarrow$) Angenommen, f ist in D nicht integrierbar. Dann gilt:

$$0 < \overline{\iint_D} f(\overline{x})\,d\bar{x} - \underline{\iint_D} f(\overline{x})d\bar{x} := \varepsilon.$$

Nach Voraussetzung existiert für dieses ε eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ von D, so daß

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon.$$

Folglich ist

$$\varepsilon = \overline{\iint_D} f(\overline{x})\,d\bar{x} - \underline{\iint_D} f(\overline{x})\,d\bar{x} \le \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon.$$ ↯!

10.3 Es sei D ein Rechteck bzw. ein Quader und $f : D \to \mathbb{R}$ sei in D beschränkt. **12/10/3/1**
Zeigen Sie:

(a) Ist f in D stetig, dann ist f in D integrierbar.

(b) Besitzt f in D höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen, dann ist f in D integrierbar.

Lösungshinweis zu Aufgabe 10.3 (a) Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Riemannschen Integrierbarkeitskriteriums **12/10/3/2**

(vgl. 10/1/10).

(b) Der Beweis erfolgt induktiv über die Anzahl der Unstetigkeitsstellen. Der Fall, bei dem genau eine Unstetigkeit auftritt, wird analog wie für Funktionen einer Veränderlichen bewiesen (vgl. 9/4/3).

Lösung zu Aufgabe 10.3 **12/10/3/3**

(a) Wir benutzen das Riemannsche Integrierbarkeitskriterium (vgl. Aufgabe 10.1).
Sei D ein Rechteckbereich (für Quader erfolgt der Beweis völlig analog). Offenbar ist die Menge D beschränkt und abgeschlossen. Nach Satz 6.17 (6/3/30) ist f in D gleichmäßig stetig.
Sei $\varepsilon > 0$. Wir suchen eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ von D, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$. Sei d der Flächeninhalt von D ($d = (b-a)(d-c)$) und $\varepsilon' > 0$ beliebig, jedoch so gewählt, daß $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{d}$. Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f in D existiert für $\varepsilon' > 0$ ein $\delta' > 0$, so daß für jedes $\overline{x}, \overline{y} \in D$ mit $|\overline{x} - \overline{y}| < \delta'$ gilt: $|f(\overline{x}) - f(\overline{y})| < \varepsilon'$.
Sei $\mathfrak{z} = \{D_{ij} : 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le m\}$ eine Zerlegung von D (vgl. 10/1/0), so daß $d(\mathfrak{z}) := \max\{\text{Diagonale von } D_{ij} : 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le m\} < \delta'$. Dann gilt (falls D_{ij} bzw. D als Flächeninhalt der entsprechenden Rechtecke aufgefaßt wird; vgl. Bemerkung in 10/1/0):

$$\begin{aligned}\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} D_{ij}\cdot\underbrace{\Big(\sup_{\overline{x}\in D_{ij}} f(\overline{x}) - \inf_{\overline{x}\in D_{ij}} f(\overline{x})\Big)}_{\le\varepsilon',\ \text{wegen } |\overline{x}-\overline{y}|<\delta'}\\ &\le \Big(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} D_{ij}\Big)\cdot\varepsilon'\\ &= D\cdot\varepsilon' = d\cdot\varepsilon' < \varepsilon.\end{aligned}$$

Ist D ein Quader, dann sind im Beweis „Flächeninhalt von D bzw. von D_{ij}“ durch „Volumen von D bzw. von D_{ijk}“ zu ersetzen, und anstatt Doppelsummen entstehen Dreifachsummen.

(b) Wir führen den Beweis induktiv über die Anzahl k der Unstetigkeitsstellen.
Für $k = 0$ ist f in D stetig und somit nach (a) integrierbar.
Mit Hilfe des Riemann-Kriteriums beweisen wir zunächst den folgenden Hilfssatz:
Ist f in D definiert und beschränkt und besitzt f in D genau eine Unstetigkeitsstelle, dann ist f in D integrierbar.
(Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 9.11 (9/4/2)).
Es sei D ein Rechteck (für den Fall, daß D ein Quader ist verläuft der Beweis analog).
Sei $D = [a, b] \times [c, d]$ und $(\alpha, \beta) \in D$ die Unstetigkeitsstelle von f. Nach Voraussetzung ist f in D beschränkt, folglich gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $|f(\overline{x})| < C$ für alle $\overline{x} \in D$. Sei $\varepsilon > 0$, $a \le \alpha' < \alpha < b' \le b$ und $b' - a'$ so klein gewählt, daß $b' - a' < \dfrac{\varepsilon}{6\cdot(d-c)\cdot C}$; dann ist $(b' - a')\cdot(d - c)\cdot 2C < \frac{\varepsilon}{3}$.

Die Rechtecke $D_1 := [a, a'] \times [c, d]$ und $D_2 := [b', b] \times [c, d]$ enthalten keine Unstetigkeitsstellen von f (falls $\alpha = a$ bzw. $\alpha = b$, dann entfällt D_1 bzw D_2), folglich ist f in D_1 und in D_2 integrierbar. Nach dem Riemann-Kriterium existieren Zerlegungen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ von D_1 bzw. D_2, so daß

$$\overline{S}_f(\mathfrak{z}_1) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_1) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_2) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ unterteilen insbesondere das Intervall $[c, d]$ in Teilintervalle. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ die gleichen Unterteilungspunkte in $[c, d]$ enthalten, anderenfalls wählen wir die gemeinsame Verfeinerung. Die Unterteilungspunkte seien gegeben durch $c = c_0 < c_1 < \cdots < c_{m+1} = d$. Die durch $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ definierten Zerlegungspunkte $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_l = a'$, $b' = a_{l+1} < \cdots < a_{n+1} = b$ lassen sich zu einer Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ zusammenfügen; es sei

$$D_{ij} := [a_i, a_{i+1}] \times [c_j, c_{j+1}] \quad \text{und} \quad \mathfrak{z} := \{D_{ij} : 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le m\}.$$

Folglich gilt für $D' := [a', b'] \times [c, d]$:

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \overline{S}_f(\mathfrak{z}_1) - \underline{S}(\mathfrak{z}_1) + \underbrace{(b' - a')}_{(a_{l+1} - a_l)} \cdot \underbrace{(d - c)}_{\sum_{j=0}^{m}(c_{j+1} - c_j)} \cdot \underbrace{\Big(\sup_{\overline{x} \in D'} f(\overline{x}) - \inf_{\overline{x} \in D'} f(\overline{x}) \Big)}_{\le 2C} \\ &\qquad + \overline{S}_f(\mathfrak{z}_2) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_2) \\ &= \overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}). \end{aligned}$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen, der natürlich auch völlig analog gilt, wenn anstatt $a' < \alpha < b'$ im Intervall $[a, b]$ der Fall $c' < \beta < d'$ in $[c, d]$ betrachtet wird.

Es sei jetzt $k \ge 1$ und für k gelte die Behauptung bereits; wir beweisen sie für $k + 1$.
Offenbar läßt sich D (als Rechteckbereich bzw. als Quader) so in zwei Teile D_1 und D_2 (Teilrechtecke bzw. Teilquader) zerlegen, daß D_1 und D_2 jeweils höchstens k Unstetigkeitsstellen enthält. Nach Induktionsvoraussetzung ist f dann in D_1 und D_2 integrierbar. Folglich gibt es nach dem Riemann-Kriterium Zerlegungen $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ von D_1 bzw. D_2, so daß $\overline{S}_f(\mathfrak{z}_i) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $i = 1, 2$. Mittels der im Hilfssatz benutzten Methode erhält man aus $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ von D, für die $\overline{S}_f(\mathfrak{z}) - \underline{S}_f(\mathfrak{z}) < \varepsilon$ gilt.

10.4 Es sei $[a, b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig in $[a, b]$, **12/10/4/1**
und es gelte $\varphi(x) \le \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Weiterhin sei
$B := \{(x, y) : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ (x-einfacher Bereich).
Zeigen Sie: B ist kompakt.

Lösungshinweis zu Aufgabe 10.4 Die Beschränktheit ist sehr einfach nachzuweisen. **12/10/4/2**
Für die Abgeschlossenheit zeigt man, daß jeder Häufungspunkt (α, β) von B zu B gehört. Hierbei wird benutzt, daß es zu (α, β) eine Folge (x_n, y_n) in B gibt mit $(x_n, y_n) \to (\alpha, \beta)$.

Lösung zu Aufgabe 10.4 Wir beweisen zunächst die Beschränktheit von B. **12/10/4/3**

Nach Voraussetzung sind φ und ψ in $[a,b]$ stetig. Folglich besitzt insbesondere ψ ein Maximum M und φ ein Minimum m in $[a,b]$. Für alle $(x,y) \in B$ gilt somit:

$$a \le x \le b \quad \text{und} \quad m \le y \le M.$$

Folglich ist B beschränkt.

Es bleibt die Abgeschlossenheit von B nachzuweisen. Dazu sei (α,β) ein Häufungspunkt von B. Es genügt zu zeigen, daß $(\alpha,\beta) \in B$.

Es sei (x_n,y_n) eine Folge in B mit $(x_n,y_n) \to (\alpha,\beta)$, also auch $x_n \to \alpha$, $y_n \to \beta$ und $a \le x_n \le b$, $\varphi(x_n) \le y_n \le \psi(x_n)$. Offenbar ist $a \le \alpha \le b$; es genügt zu zeigen: $\varphi(\alpha) \le \beta \le \psi(\alpha)$.

Angenommen, $\beta < \varphi(\alpha)$ oder $\psi(\alpha) < \beta$.

Wir führen $\beta < \varphi(\alpha)$ zum Widerspruch; der Fall $\psi(\alpha) < \beta$ wird analog behandelt.

Sei $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon < \varphi(\alpha) - \beta$. Da φ stetig ist in $[a,b]$, ist auch $\varphi(x) - \beta - \varepsilon$ dort stetig und $\varphi(\alpha) - \beta - \varepsilon > 0$. Folglich existiert eine Umgebung $U_\delta(\alpha)$, so daß $\varphi(x) - \beta - \varepsilon > 0$ für alle $x \in U_\delta(\alpha)$ (vgl. 6/3/11), also $\varphi(x) > \beta + \varepsilon$. Insbesondere ist $y_n \ge \varphi(x_n) > \beta + \varepsilon$ für alle Folgeglieder (x_n,y_n). Die Umgebung $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \times (\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ enthält also kein Folgeglied und somit ist (α,β) kein Häufungspunkt von B. ↯!

10.5 Man beweise Satz 10.7 (10/2/8 – dreifach iterierte Integrale über Quadern): **12/10/5/1**

Sei $D = [a,a^*] \times [b,b^*] \times [c,c^*]$ und $f(x,y,z)$ in D integrierbar. Ist $f(x,y,z)$ für jedes fixierte $x \in [a,a^*]$ (als Funktion von y,z) in $[b,b^*] \times [c,c^*] := D'$ integrierbar und $F(x) := \iint\limits_{D'} f(x,y,z)\,dydz$ (als Funktion von x) in $[a,a^*]$ integrierbar, dann ist

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^{a^*} \Big(\iint\limits_{D'} f(x,y,z)\,dydz \Big) dx.$$

Lösungshinweis zu Aufgabe 10.5 Der Beweis erfolgt analog wie der zu Satz 10.4 (10/1/22). **12/10/5/2**

Lösung zu Aufgabe 10.5 Seien $\mathfrak{z}_1 = (a_0,\dots,a_{n+1})$, $\mathfrak{z}_2 = (b_0,\dots,b_{m+1})$, $\mathfrak{z}_3 = (c_0,\dots,c_{k+1})$ Zerlegungen der Intervalle $[a,a^*]$, $[b,b^*]$ bzw. $[c,c^*]$, $D_{ij\nu} := [a_i,a_{i+1}] \times [b_j,b_{j+1}] \times [c_\nu,c_{\nu+1}]$, $D_{j\nu} := [b_j,b_{j+1}] \times [c_\nu,c_{\nu+1}]$ und $\bar{\mathfrak{z}} = \{D_{ij\nu} : 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le m,\ 0 \le \nu \le k\}$. **12/10/5/3**

Dann ist mit Hilfe des Satzes 10.1 (10/1/3) leicht nachzuweisen, daß

$$F(x) = \iint\limits_{D'} f(x,y,z)\,dydz = \sum_{j=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{k} \iint\limits_{D'_{ij}} f(x,y,z)\,dydz.$$

Folglich ist

$$\int\limits_a^{a^*} F(x)\,dx = \int\limits_a^{a^*} \Big(\iint\limits_{D'} f(x,y,z)\,dydz\Big)dx$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} \Big(\iint\limits_{D'} f(x,y,z)\,dydz\Big)dx$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} \Big(\sum_{j=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{k} \iint\limits_{D'_{j\nu}} f(x,y,z)\,dydz\Big)dx.$$

Für alle $\overline{x} \in D$ und $h_{ij\nu} := \inf\limits_{\overline{x}\in D_{ij\nu}} f(\overline{x})$, $H_{ij\nu} := \sup\limits_{\overline{x}\in D_{ij\nu}} f(\overline{x})$, gilt stets:
$h_{ij\nu} \leq f(\overline{x}) \leq H_{ij\nu}$ und somit nach Satz 10.2 (10/1/11)

$$h_{ij\nu}\cdot D'_{j\nu} \leq \iint\limits_{D'_{j\nu}} f(x,y,z)\,dydz \leq H_{ij\nu}\cdot D'_{j\nu}.$$

Folglich ist

$$h_{ij\nu}\cdot \underbrace{D'_{j\nu}\cdot(a_{i+1}-a_i)}_{D_{ij\nu}} \leq \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} \Big(\iint\limits_{D'_{j\nu}} f(x,y,z)\,dydz\Big)dx \leq H_{ij\nu}\cdot \underbrace{D'_{j\nu}\cdot(a_{i+1}-a_i)}_{D_{ij\nu}}.$$

Summiert man die Ungleichungen nach i, j, ν, so erhält man

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{k} h_{ij\nu}\cdot D_{ij\nu}$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{k} \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} \Big(\iint\limits_{D'_{j\nu}} f(x,y,z)\,dydz\Big)dx$$
$$= \int\limits_a^{a^*} \Big(\iint\limits_{D'} f(x,y,z)\,dydz\Big)dx$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{k} H_{ij\nu}\cdot D_{ij\nu}$$
$$= \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

Da f in D integrierbar ist, unterscheiden sich nach dem Riemann-Kriterium Ober- und Untersumme von f bei geeigneten Zerlegungen um beliebig wenig. Nach Definition des Integrals gilt stets:

$$\underline{S}_f(\mathfrak{z}) \leq \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz \leq \overline{S}_f(\mathfrak{z}).$$

Folglich ist

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^{a^*} \Big(\iint\limits_{D'} f(x,y,z)\,dydz\Big)dx.$$

10.6 Sei $D := \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2\}$, und f sei in D durch $f(x,y) = x^y$ definiert. **12/10/6/1**
Man berechne $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 10.6 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_1^2 \Big(\int\limits_0^1 x^y\,dx\Big)dy = \ln\frac{3}{2}$. **12/10/6/2**

Lösung zu Aufgabe 10.6 Für $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2\}$ ist **12/10/6/3**

$$f(x,y) = x^y = \begin{cases} e^{y\ln x}, & \text{falls } x \ne 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

In D ist f stetig. Für $(x,y) \in D$ und $x \ne 0$ ist dies offensichtlich. Es sei nun $x = 0$, $1 \le y \le 2$ und (x_n, y_n) eine gegen $(0,y)$ konvergierende Folge aus D, also $x_n \to 0$, $y_n \to y$. Für die Folgeglieder (x_{m_i}, y_{m_i}) mit $x_{m_i} = 0$ ist $f(x_{m_i}, y_{m_i}) = 0$.
Sei (x_{n_i}, y_{n_i}) die Teilfolge von (x_n, y_n) mit $x_{n_i} \ne 0$. Dann ist

$$f(x_{n_i}, y_{n_i}) = e^{y_{n_i}\cdot\ln x_{n_i}} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

denn $\ln x_{n_i} \longrightarrow -\infty$ und (y_{n_i}) ist beschränkt. Also

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 0 = f(0,y).$$

Damit ist f auch in $(0,y)$ stetig. Die Berechnung des Integrals erfolgt nun mit Hilfe des Korollars zum Satz 10.3 (10/1/16). Es ist

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy &= \int\limits_1^2 \Big(\int\limits_0^1 x^y\,dx\Big)dy \\ &= \int\limits_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 dy = \int\limits_1^2 \frac{1}{y+1}\,dy \\ &= \Big[\ln(y+1)\Big]_1^2 = \ln\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

10.7 Es sei $B := \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$ und f sei in B durch **12/10/7/1**
$f(x,y) = x^2 + 7y^2$ definiert. Berechnen Sie $\iint\limits_B f(x,y)\,dxdy$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 10.7 $\iint\limits_B f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \frac{8}{15}$. **12/10/7/2**

Lösung zu Aufgabe 10.7 Für $\varphi(x) := 0$, $\psi(x) := x^2$ sind φ und ψ stetig in $[0,1]$. **12/10/7/3**
Folglich bildet die Menge
$B = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ einen x-einfachen Bereich. Da f in B

stetig ist, läßt sich das Integral $\iint\limits_B f(x,y)\,dxdy$ mit Hilfe des Satzes 10.5 (1) (10/1/26) berechnen. Es ist

$$\begin{aligned}
\iint\limits_B f(x,y)\,dxdy &= \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \Big)\,dx \\
&= \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{x^2} (x^2+7y^2)\,dy \Big)\,dx \\
&= \int\limits_0^1 \Big[x^2 y + \tfrac{7}{3}\,y^3 \Big]_0^{x^2}\,dx \\
&= \int\limits_0^1 (x^4 + \tfrac{7}{3}\,x^6)\,dx \\
&= \Big[\tfrac{x^5}{5} + \tfrac{1}{3}\,x^7 \Big]_0^1 = \tfrac{8}{15}.
\end{aligned}$$

10.8 Berechnen Sie mit Hilfe des Integrals das Volumen der Punktmenge **12/10/8/1**

$$B = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1 \;\text{ und }\; 0 \le z \le f(x,y)\},$$

wobei $f(x,y) := 2 + \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$ (schrägabgeschnittener Zylinder).

Lösungshinweis zu Aufgabe 10.8 Es sei $G = \{(x,y) : -1 \le x \le 1,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ mit $\varphi(x) = -\sqrt{1-x^2}$ und $\psi(x) = \sqrt{1-x^2}$. **12/10/8/2**

Das Volumen beträgt $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^1 \Big(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (2 + \frac{x}{2} + \frac{y}{3})\,dy \Big)\,dx = 2\pi.$

Lösung zu Aufgabe 10.8 Die Grundfläche G des Zylinders ist gegeben durch $x^2 + y^2 \le 1$, d.h., G ist ein Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt $(0,0)$. Sei $\varphi(x) := -\sqrt{1-x^2}$ und $\psi(x) := \sqrt{1-x^2}$. Dann ist $G = \{(x,y) : -1 \le x \le 1,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ ein x-einfacher Bereich, in dem $f(x,y) = 2 + \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$ definiert und stetig ist. Folglich gilt nach Satz 10.5 (1) (10/1/26): **12/10/8/3**

$$\begin{aligned}
\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy &= \int\limits_{-1}^1 \Big(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (2 + \tfrac{x}{2} + \tfrac{y}{3})\,dy \Big)\,dx \\
&= \int\limits_{-1}^1 \Big[(2+\tfrac{x}{2})y + \frac{y^2}{6} \Big]_{-\psi(x)}^{\psi(x)}\,dx \quad \text{(wegen } \varphi(x) = -\psi(x)\text{)} \\
&= \int\limits_{-1}^1 \Big[2(2+\tfrac{x}{2})\cdot\psi(x) + \frac{\psi^2(x)}{6} - \frac{\psi^2(x)}{6} \Big]\,dx \\
&= 4\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int\limits_{-1}^1 x\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx.
\end{aligned}$$

Es ist $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (vgl. Beispiele: 9/6/1/4). Weiterhin ist

$$\int x \cdot \sqrt{1-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = -\tfrac{1}{3}\sqrt{1-x^2}^{\,3} \qquad (t := 1-x^2)$$

und somit $\int\limits_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx = 0$. Damit ist das Volumen der Punktmenge B gegeben durch $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = 2\pi$.

10.9 In dem Intervall $[0,1]$ seien die Funktionen φ, ψ durch $\varphi(x) := x^2$ und $\psi(x) := \sqrt[4]{x}$ definiert. B sei der durch $B := \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ gegebene x-einfache Bereich. Weiterhin sei $f(x,y) = \sqrt{x} - y^2$. **12/10/9/1**

(a) Berechnen Sie $\iint\limits_B f(x,y)\,dxdy$.

(b) Stellen Sie B als y-einfachen Bereich dar, und berechnen Sie das Integral erneut, jedoch jetzt über dem y-einfachen Bereich B.

Lösungshinweis zu Aufgabe 10.9 (a) $\iint\limits_B f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (\sqrt{x} - y^2)\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{7}$. **12/10/9/2**

(b) Es ist $B = B_1 := \{(x,y) : \varphi_1(y) \le x \le \psi_1(y),\ 0 \le y \le 1\}$ mit $\varphi_1(y) = y^4$ und $\psi_1(y) = \sqrt{y}$ und somit

$$\iint\limits_{B_1} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x,y)\,dx\Big)\,dy = \frac{1}{7}.$$

Lösung zu Aufgabe 10.9 **12/10/9/3**

(a) Offenbar ist $f(x,y) = \sqrt{x} - y^2$ in B stetig. Folglich gilt nach Satz 10.5 (1) (10/1/26):

$$\begin{aligned}
\iint\limits_B f(x,y)\,dxdy &= \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (\sqrt{x} - y^2)\,dy\Big)\,dx \\
&= \int\limits_0^1 \Big[\sqrt{x}\cdot y - \frac{y^3}{3}\Big]_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\,dx \\
&= \int\limits_0^1 \Big(\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x} - \tfrac{1}{3}\sqrt[4]{x}^{\,3} - \sqrt{x}\cdot x^2 + \frac{x^6}{3}\Big)\,dx \\
&= \int\limits_0^1 \Big(x^{\frac{3}{4}} - \tfrac{1}{3}x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{1}{3}x^6\Big)\,dx \\
&= \Big[\tfrac{8}{21}x^{\frac{7}{4}} - \tfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \tfrac{1}{21}x^7\Big]_0^1 = \tfrac{1}{7}.
\end{aligned}$$

(b) B läßt sich wie folgt als y-einfacher Bereich B_1 darstellen:

$$B_1 := \{(x,y) : \varphi_1(y) \le x \le \psi_1(y),\ 0 \le y \le 1\},$$

wobei $\varphi_1(y) = y^4,\ \psi_1(y) = \sqrt{y}$. Weiterhin ist $f(x,y)$ in B_1 stetig und somit nach Satz 10.5 (b) (10/1/26):

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{B_1} f(x,y)\,dxdy &= \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\psi_1(y)} f(x,y)\,dx \Big)\,dy \\
&= \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{y^4}^{\sqrt{y}} (\sqrt{x} - y^2)\,dx \Big)\,dy \\
&= \int\limits_0^1 \Big[\tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - y^2 x \Big]_{y^4}^{\sqrt{y}}\,dy \\
&= \int\limits_0^1 \Big(\tfrac{2}{3} y^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{3} y^6 + y^6 \Big)\,dy \\
&= \Big[\tfrac{8}{21} y^{\frac{7}{4}} - \tfrac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} - \tfrac{2}{21} y^7 + \tfrac{1}{7} y^7 \Big]_0^1 = \tfrac{1}{7}.
\end{aligned}$$

10.10 Man berechne das Integral $\iiint\limits_B \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$ über dem Tetraeder B, das von **12/10/10/1**
den Ebenen $x = 0;\ y = 0;\ z = 0;\ x + y + z = 1$ begrenzt wird.

Lösungshinweis zu Aufgabe 10.10 $\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{1-x} \Big(\int\limits_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,dz \Big)\,dy \Big)\,dx$ **12/10/10/2**

$$= -\tfrac{5}{16} + \tfrac{1}{2} \ln 2 \approx 0{,}034.$$

Lösung zu Aufgabe 10.10 Wir stellen zunächst das Tetraeder als einfachen Bereich **12/10/10/3**
dar. Für $z = 0$, also für die x-y-Ebene folgt aus $x+y+z = 1$ die Gleichung $y = 1-x$. Setzt man $\varphi_1(x) = 0$ und $\psi_1(x) = 1-x$, so erhält man in der x-y-Ebene den einfachen Bereich

$$B' := \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\} \quad \text{(siehe auch 10/2/12).}$$

Wählt man nun $\varphi_2(x,y) := 0$ und $\psi_2(x,y) := z = 1-x-y$, so entsteht der dreidimensionale einfache Bereich

$$B = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-x-y\}.$$

Offenbar ist die Funktion $f(x,y,z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^3}$ in B stetig, folglich läßt sich das Dreifachintegral mit Hilfe des Satzes 10.9 (10/2/19) wie folgt berechnen:

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dxdydz &= \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{1-x} \Big(\int\limits_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx \\
&= \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{1-x} \Big[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\Big]_0^{1-x-y}\,dy\Big)\,dx \\
&= \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^{1-x} \Big(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x+y)^2}\Big)\,dy\Big)\,dx \\
&= \int\limits_0^1 \Big[-\frac{1}{8}y-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x+y}\Big]_0^{1-x}\,dx \\
&= \int\limits_0^1 \Big(-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}\Big)\,dx \\
&= \Big[-\frac{3}{8}x+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}\ln|1+x|\Big]_0^1 \\
&= -\frac{5}{16}+\frac{1}{2}\ln 2 \approx 0,034.
\end{aligned}
$$